



# ISAV2024

چهاردهمین کنفرانس بین المللی آکوستیک و ارتعاشات  
۲۱ و ۲۲ آذر ماه ۱۴۰۳ کرج - ایوان



## مدل سازی و تحلیل دینامیکی یک مکانیزم جداساز ارتعاشی با سختی منفی

محمد جواد رجائی زاده هرندی<sup>۱\*</sup>، محمد رضا الهامی<sup>۲</sup>، سید محمد علوی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> ایران، تهران، اتوبان شهید بابایی، بعد از پل لشگرک، روبروی حکیمیه، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، دانشکده فنی و مهندسی، ۱۶۹۸۷۱۵۴۶۱، کارشناس ارشد مهندسی مکانیک.

<sup>۲</sup> دانشگاه جامع امام حسین (ع)، دانشیار گروه مهندسی مکانیک.

<sup>۳</sup> دانشگاه جامع امام حسین (ع)، دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک.

\*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: [mohamadjavadrajeezadeh@gmail.com](mailto:mohamadjavadrajeezadeh@gmail.com)

### چکیده

جداسازهای ارتعاشی سختی منفی، با توجه به ویژگی‌های سختی استاتیکی بالا-دینامیکی پایین و غیرخطی بودن منحصربه‌فردشان مورد توجه طراحان قرار گرفته‌اند. هنگام طراحی یک جداساز ارتعاشی سختی منفی، ایده اصلی این است که یک مکانیسم سختی منفی برای جبران سختی مثبت عناصر الاستیک معرفی شود. سختی منفی همواره یکی از مسائل چالش‌برانگیز در مباحث دینامیک و ارتعاشات بوده است. یک فنر مکانیکی همواره نیرویی در خلاف جهت نیروی وارد شده ایجاد می‌کند ولی گاهی در برخی مکانیسم‌ها مجموعه فنرها به‌گونه‌ای قرار گرفته‌اند که در یک بازه خاص از دامنه، نیرویی که وارد می‌کنند هم جهت با نیروی خارجی خواهد بود. در این صورت می‌گوییم این مجموعه فنرها دارای سختی منفی هستند. در این مقاله سعی شده است ماهیت سختی منفی مورد بحث قرار گرفته و یک مکانیزم که دارای سختی منفی است ارائه شود. روابط مربوط به نیروها در این مکانیزم استخراج شده و رابطه سختی منفی نسبت به پارامترهای مسئله به دست آمده است.

کلمات کلیدی: سختی منفی؛ فنر فشاری.

### ۱- مقدمه

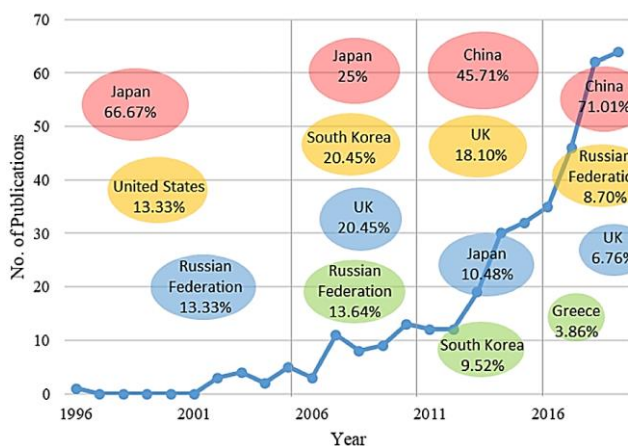
کنترل ارتعاش سازه برای چندین دهه، از سوی جامعه تحقیقاتی مهندسی مکانیک و عمران مورد توجه بوده است. به‌عنوان یک روش مؤثر برای محافظت از یک سازه، جداساز ارتعاشی سختی منفی، اخیراً به طور فزاینده‌ای محبوب شده است [۱]، [۲]. جداساز

ارتعاشی سختی منفی پتانسیل این را دارد که فرکانس طبیعی سیستم را به میزان قابل توجهی کاهش دهد تا انتقال نیرو یا جابه‌جایی را به حداقل برساند حتی برای موارد تحریک با فرکانس پایین که در آن جداسازی‌های ارتعاشی متداول بی‌اثر هستند. محبوبیت جداساز ارتعاشی سختی منفی آن است که موجب می‌شود تا انتقال ارتعاش از منابع ارتعاشی کاهش یابد و درعین حال با ارائه ظرفیت حمل بار کافی، پایداری سیستم تضمین شود.

مفهوم سختی منفی، برای اولین بار توسط مولینوکس (۱۹۵۷) ارائه شد. اولین وسیله‌ای که توسط مولینوکس ارائه شد ثابت شد که ناپایدار است؛ زیرا ظرفیت حمل بار را نداشت و منجر به تغییر شکل بزرگ در هر بارگذاری می‌شد [۳]. به همین دلیل بود که او عناصر سختی منفی را با عناصر سختی مثبت به یکدیگر متصل کرد تا ناپایداری مرتبط با سختی منفی را در طراحی‌های بعدی خود جبران کند. این روش موجب می‌شود مشکل ناپایداری در اثر جابجایی‌های کوچک رفع شود. خاصیت غیرخطی به جداسازهای ارتعاشی سختی منفی، امکان ایجاد همزمان سختی دینامیکی کم و استاتیکی بالا را می‌دهد. بررسی ویژگی‌های غیرخطی توسط آلابوزف (۱۹۸۹) انجام شد.

برای طراحی یک جداساز ارتعاشی سختی منفی، عناصر سختی مثبت معمولاً به شکل فنرهای سیم‌پیچ و پیش فشرده هستند [۷]-[۴]. تیرهای پیش کمانش [۱۰]-[۸] و مغناطیسی [۱۳]-[۱۱] نیز از ساختارهایی هستند که قادر به ایجاد سختی منفی هستند. در این مقاله، یک ساختار سختی منفی طراحی شده است که می‌تواند به عنوان بخشی از ساختار جداساز ارتعاشی مورد استفاده قرار گیرد.

در دهه‌های گذشته، سیستم‌ها و مکانیسم‌هایی که با خاصیت سختی منفی طراحی شده‌اند، مورد توجه قرار گرفته‌اند. از این رو، خلاصه‌سازی سیستماتیک این نتایج تحقیقاتی از اهمیت زیادی برخوردار است. افزایش روزافزون انتشارات در مورد این موضوع از دهه ۱۹۹۰ در شکل (۱) نشان داده شده است و داده‌های تاریخی اسکوپوس<sup>۱</sup> نیز توزیع این انتشارات را بر اساس کشورها نشان می‌دهد.



شکل ۱. تعداد مقالات منتشر شده در منابع نمایه‌شده اسکوپوس در مورد کاربرد سختی منفی در جداسازی ارتعاش بر اساس کشور مبدأ نویسندگان (از ۱۹۹۶ تا ۲۰۱۹)

## ۲- مفهوم سختی منفی

سختی منفی، بر خلاف سختی مثبت، با ایجاد نیرویی در جهت نیروی خارجی وارد شده، موجب افزایش تأثیر نیروی خارجی می‌شود [۱۴]. همان‌طور که در رابطه (۱) توضیح داده شد، بزرگی نیروی عکس‌العمل به طور خطی متناسب با تغییر شکل است. انرژی پتانسیل تولید شده توسط عنصر سختی منفی که به معنای از دست دادن انرژی در طول تغییر شکل است در رابطه (۲) نشان داده شده است.

<sup>۱</sup> Scopus

$$k = -\frac{F}{D} \quad (1)$$

$$U = -\frac{1}{2}kD^2 \quad (2)$$

که  $F$  نیروی اعمال شده،  $D$  تغییر شکل و  $k$  سختی جسم است.

سختی منفی در ابتدا در پدیده کمانش ستون‌ها به‌عنوان یکی از حالت‌های شکست ستون مشاهده شد که در آن ستون پایداری خود را با افزایش ناگهانی تغییر شکل از دست می‌دهد [۱۵].

مولینوکس (۱۹۵۷) برای اولین بار مفهوم سختی منفی را پیشنهاد کرد و مکانیزمی را برای کاهش ارتعاش در سال ۱۹۵۷ طراحی کرد. او در ابتدا از دو فنر خطی مایل به عنوان عناصر ذخیره انرژی برای ایجاد حالت سختی منفی استفاده کرد. با این حال، او دریافت که دستگاه سختی منفی برای بارهای بزرگ مناسب نیست زیرا منجر به تغییر شکل‌های بزرگ می‌شود. از این رو، او یک فنر عمودی را برای ایجاد سختی مثبت برای حفظ پایداری به این دستگاه وارد کرد. باید توجه داشت که عنصر سختی منفی ناپایدار و بدون ظرفیت باربری است و نمی‌تواند جداسازی ارتعاش انجام دهد. از این رو، با به‌کارگیری همزمان سختی مثبت به همراه سختی منفی می‌توان به جداسازی‌های مطلوبی از ارتعاشات دست یافت.

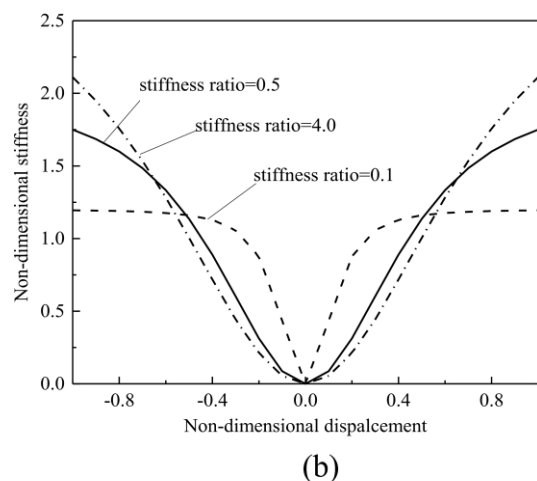
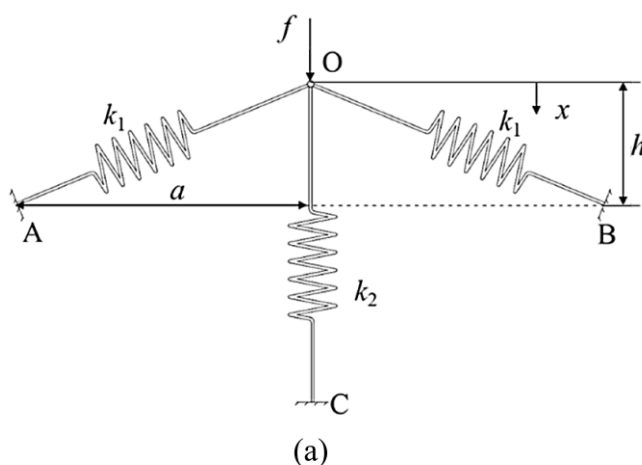
در عین حال، روش‌های کنترل سختی منفی می‌توانند موجب جداسازی‌های قابل قبولی شوند [۱۶]. مواد کامپوزیتی با خواص سختی منفی روش‌های جدیدی برای ارائه ضریب بالک و مدول یانگ منفی پیشنهاد دادند [۱۷].

### ۳- ایجاد سختی منفی با استفاده از فنر

در جداسازی‌های ارتعاشی سختی منفی معمولاً از فنرهای پیش فشرده استفاده می‌شود. مولینوکس (۱۹۵۷) طرحی را بر مبنای سه فنر پیشنهاد کرد (شکل (۲)). در این شکل، نیروی بازگرداننده ترکیبی از نیروی فنرهای عمودی و افقی است و به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f = k_2 x + 2k_1 \left( \frac{\sqrt{h^2 + a^2}}{\sqrt{a^2 + (h-x)^2}} - 1 \right) (h-x) \quad (3)$$

که در آن  $k_1$  و  $k_2$  به ترتیب سختی فنر مایل و عمودی و  $h$  و  $a$  مربوط به محل نصب فنرها هستند.



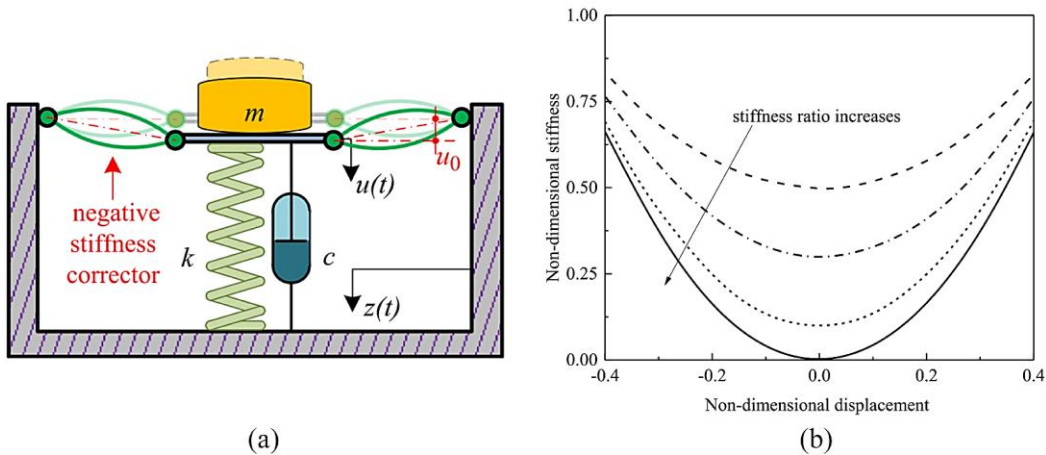
شکل ۲. دستگاه سه فنره: (الف) نمایش شماتیک؛ (ب) سختی بدون بعد [۱۸].

از تقسیم رابطه (۳) به جابه‌جایی سیستم ( $x$ ) سختی سیستم به دست می‌آید.

$$K = k_r - 2k_1 \frac{\sqrt{h^2 + a^2}}{\sqrt{a^2 + (h-x)^2}} + 2k_1 (h-x)^2 \frac{\sqrt{h^2 + a^2}}{(a^2 + (h-x)^2)^{3/2}} \quad (4)$$

هنگامی که مقدار جابه‌جایی  $x$  برابر با  $h$  می‌شود، فنرهای مایل به حالت افقی قرار می‌گیرند. در این حالت تمام نیروی وزن سیستم توسط فنر عمودی تحمل می‌شود [۴]. در شکل ۲(ب)، در نقطه تعادل ( $x = 0$ )، سختی سیستم برابر صفر است؛ در حالی که سختی استاتیکی بالا می‌باشد. به این پدیده، سختی استاتیکی بالا-دینامیکی پایین می‌گویند. کارلا و همکاران یک سری تحقیقات بر روی این مدل انجام دادند و نسبت سختی بهینه را به دست آوردند [۴].

اکثر مطالعات انجام شده در مورد جداسازهای ارتعاشی سختی منفی با مشخصه سختی شبه صفر بر این فرض ساخته شده‌اند که این دستگاه‌ها می‌توانند در موقعیت تعادلی که سختی دینامیکی برابر با صفر است، ثبات را حفظ کنند. باین‌حال، در عمل، به دلیل نقص در ساخت، نصب و همچنین تغییر محیط، تنظیم سختی کلی به صفر و ایجاد تعادل بار در نقطه تعادل مورد نظر چالش‌برانگیز است. لیو و همکاران (۲۰۱۳) ثابت کردند نقص اولیه کوچک‌تر می‌تواند محدوده بزرگ‌تری از سختی منفی ایجاد کند. به طور مشابه، هوانگ و همکاران (۲۰۱۴) یک جداساز ارتعاشی سختی منفی طراحی کردند و قوانین تغییر نیرو و سختی آن را با جرم نامی به دست آوردند. در شکل (۳)، دو تیر جدار نازک مفصل لولایی با نقص اولیه طراحی شده و جرم اعمال شده دارای اضافه بار بوده است. هم سختی و هم ناقص بودن بار، سختی کل دستگاه را افزایش می‌دهد که منجر به فرکانس طبیعی بالای ناخواسته می‌شود.



شکل ۳. جداساز ارتعاشی سختی منفی با مفصل لولایی پیش‌کمانش: (الف) نمایش شماتیک؛ (ب) مشخصه سختی-جابه‌جایی [۱۹].

#### ۴- جداساز ارتعاشی سختی منفی با استفاده از مغناطیس

از آنجایی که نیروی مغناطیسی بین دو آهنربای استوانه‌ای با مجذور فاصله نسبت معکوس دارد، همان‌طور که در رابطه (۵) آمده است، مغناطیس، مانند آهنرباهای دائمی، الکترومغناطیس‌ها و آهنرباهای ترکیبی برای توسعه جداسازهای ارتعاشی سختی منفی به کار می‌روند [۲۰].

$$F(x) \approx \frac{\pi\mu_0}{4} M^2 R^2 \left[ \frac{1}{S^2} + \frac{1}{(S+2L)^2} - \frac{2}{(S+L)^2} \right] \quad (5)$$

که  $R$ ،  $L$  و  $M$  شعاع، طول و شدت میدان مغناطیسی آهنرباها،  $s$  فاصله بین دو آهنربا و  $\mu$  ضریب نفوذپذیری خلاء است که برابر با  $4\pi \times 10^{-7} Tm/A$  است.

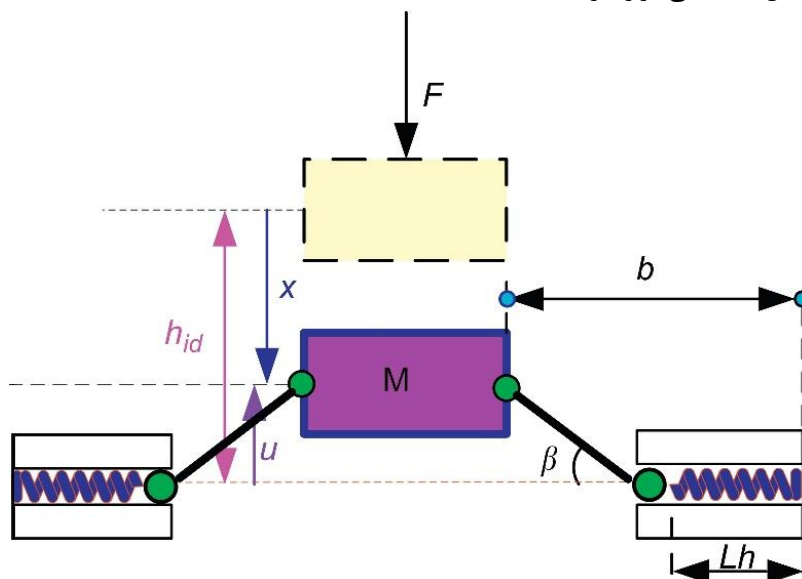
هنگامی که آهنربا از موقعیت تعادل خارج می‌شود، یک اختلاف نیروی مغناطیسی در همان جهت جابه‌جایی نسبی ایجاد می‌شود که به حرکت نسبی کمک می‌کند. ویژگی انتقال نیرو بدون تماس و عدم ایجاد سر و صدا، آهنرباها را برای جداسازی ارتعاشات مناسب می‌سازد. فنرهای مغناطیسی می‌توانند به‌تنهایی کار کنند یا با سایر عناصر سختی مثبت مثل فنرهای سیم‌پیچ، برای ایجاد جداسازهای ارتعاشی سختی منفی مغناطیسی استفاده شوند.

میزونو و همکاران (۲۰۰۷) یک جداساز ارتعاشی سختی منفی را طراحی کردند تا مشخصه جابه‌جایی نیروی غیرخطی و سختی استاتیکی بالا را از طریق بهینه‌سازی ترکیب آهنرباهای دائمی و فنرهای سیم‌پیچ ایجاد کند. کارلا و همکاران (۲۰۰۸) یک جداساز ارتعاشی سختی منفی متشکل از فنرها و آهنرباهای مکانیکی ایجاد کردند [۲۱]. دو فنر سیم‌پیچ عمودی سختی مثبتی را برای پایدار نگه داشتن دستگاه و بهبود ظرفیت تحمل بار فراهم می‌کند. نوار صاف تنظیم و تراز را آسان‌تر و سریع‌تر می‌کند. لی و همکاران (۲۰۱۳) تعلیق مغناطیسی جداساز ارتعاشی سختی منفی را طراحی کردند که از نیروهای کششی غشاهای لاستیکی برای ایجاد سختی منفی استفاده می‌شد. آنها مطالعه پارامتری را برای تعیین ساختار بهینه انجام دادند و به طور تجربی تأیید کردند که غشاهای لاستیکی می‌توانند فرکانس طبیعی را تا ۵۰ درصد کاهش دهند.

شان و همکاران (۲۰۱۵) یک جداساز ارتعاشی سختی منفی کوچک با فنر پنوماتیک و دو آهنربای حلقه‌ای طراحی کردند. با تنظیم سختی فنر پنوماتیک و فنر مغناطیسی، سختی کل در موقعیت تعادل صفر می‌شود. این دستگاه می‌تواند فرکانس تشدید را کاهش دهد و به طور همزمان ظرفیت حمل بار بالایی دارد. با این حال، بیشینه انتقال‌پذیری در ناحیه تشدید به دلیل میرایی ناکافی زیاد است. برای جداساز ارتعاشی سختی منفی طراحی شده با آهنرباهای حلقوی، رابطه سختی و جابه‌جایی آن به طور قابل توجهی به یکسان بودن یا نبودن ارتفاع آهنرباهای داخلی و خارجی بستگی دارد. میزان سختی زمانی که این دو آهنربا با ارتفاعات متفاوتی باشند نوسان بیشتری دارد [۲۲]. در واقع، آهنرباهای دائمی را می‌توان با آهنرباهای الکتریکی جایگزین کرد. به عنوان مثال، جداسازهای ارتعاشی سختی منفی مغناطیسی هیبریدی با ترکیب آهنرباهای دائمی با آهنرباهای الکتریکی طراحی شدند. در مقایسه با سیستم مغناطیسی دائمی کنترل شده غیرفعال، سیستم‌های مغناطیسی هیبریدی پایدارتر هستند و می‌توانند قابلیت کنترل بهتری داشته باشند [۲۴]، [۲۳].

## ۵- شرح مدل پیشنهادی

مدل پیشنهادی سیستم سختی منفی شامل دو سازه متقارن سختی منفی در شکل (۴) نشان داده شده است. هر سازه سختی منفی شامل یک فنر افقی است که دارای سختی  $K_h$  به صورت سری با میله‌ای به طول  $a$  است. یک سر فنر افقی به دیوار ثابت می‌شود در حالی که سر دیگر آن به پین راهنمای لغزنده متصل است که در صفحه افقی روی دو ریل موازی آزاد حرکت می‌کند. پین راهنمای لغزنده به یک انتهای میله متصل می‌شود. انتهای دیگر میله به وسیله مفصل لولا به تجهیزات جداسازی (جرم) با وزن  $M$  متصل می‌شود. میله می‌تواند در اطراف مفصل لولا بچرخد. بر اساس پیکربندی ساده، تجهیزات جداسازی اجازه دارند در امتداد مسیر کشویی در صفحه عمودی حرکت کنند. سختی دینامیکی را می‌توان با تنظیم فاصله  $b$  و طول میله  $a$  تنظیم کرد. در ابتدا، در موقعیت تعادل استاتیک ارائه شده توسط خط‌چین، چنانچه از جرم جسم صرف نظر کنیم، در حالت افقی بودن بازوها، سیستم در حالت تعادل استاتیکی قرار دارد.



شکل ۴. مدل پیشنهادی سیستم سختی منفی.

## ۶- مشخصه مکانیکی مدل پیشنهادی

### ۱-۶ ساختار سختی منفی

ساختار سختی منفی مانند شکل (۴) در نظر گرفته شده است. در اینجا، وزن تجهیزات جداسازی نادیده گرفته می‌شود. مطابق شکل (۴)، جرم به مقدار  $x$  از موقعیت اولیه به وسیله نیروی  $F$  که با جابه‌جایی مخالف است به سمت پایین جابه‌جا می‌شود. نتیجه این است که دو فنر افقی، فشرده شده و دو نیروی بازگرداننده عمودی ایجاد می‌کنند که بر روی جرم اثر می‌گذارند.

کل کار مجازی انجام شده بر روی تجهیزات جداسازی در جهت عمودی به شرح زیر است:

$$\delta U = F\delta x - 2F_h \tan(\beta) \delta x \quad (6)$$

با استفاده از اصل کار مجازی می‌توان معادله زیر را به دست آورد:

$$F\delta x - 2F_h \tan(\beta) \delta x = 0 \quad (7)$$

که در آن  $F_h = K_h(L_o - L_h)$  نیروی فنر افقی است،  $\beta$  زاویه میله نسبت به افق بر حسب درجه است،  $L_h$  و  $L_o$  به ترتیب طول اولیه و طول ثانویه در موقعیت دلخواه فنرهای افقی هستند.

در یک موقعیت دلخواه، زاویه  $\beta$  را می‌توان به صورت زیر تعیین کرد:

$$\tan(\beta) = \frac{h_{id} - x}{b - L_h} \quad (8)$$

که در آن

$$L_h = b - \sqrt{a^2 - (h_{id} - x)^2} \quad (9)$$

$$h_{id} = \sqrt{a^2 - (b - L_o)^2} \quad (10)$$

با جایگذاری روابط (۸)، (۹) و (۱۰) و نیروی افقی فنر ( $F_h$ ) در رابطه (۷) نیروی بازگرداننده سیستم به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$F = 2K_h \left( \frac{L_o}{\sqrt{a^2 - (\sqrt{a^2 - (b - L_o)^2} - x)^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2 - (\sqrt{a^2 - (b - L_o)^2} - x)^2}} + 1 \right) (\sqrt{a^2 - (b - L_o)^2} - x) \quad (11)$$

پارامترهای بدون بعد زیر به منظور بدون بعد کردن نیروی بازگرداننده سیستم تعریف می‌شود:

$$\hat{F} = \frac{F}{K_h L_o} \quad (12)$$

$$\hat{x} = \frac{x}{L_o} \quad (13)$$

$$\gamma_1 = \frac{a}{L_o} \quad (14)$$

$$\gamma_2 = \frac{b}{L_o} \quad (15)$$

$$\hat{h}_{id} = \sqrt{\left(\frac{a}{L_o}\right)^2 - \left(\frac{b}{L_o} - 1\right)^2} = \sqrt{\gamma_1^2 - (\gamma_2 - 1)^2} \quad (16)$$

که نیروی بازگرداننده بدون بعد،  $\hat{x}$  جابجایی بدون بعد،  $\gamma_1$  و  $\gamma_2$  پارامترهای پیکربندی،  $\hat{h}_{id}$  تغییر شکل اولیه بدون بعد فنر عمودی،  $a$  طول میله و  $b$  فاصله دیوار تا جرم است.

با جایگذاری پارامترهای بدون بعد تعریف شده در رابطه (۱۱)، نیروی بازگرداننده بدون بعد سیستم به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\hat{F} = 2 \left( \frac{1}{\sqrt{\gamma_1^2 - (\hat{h}_{id} - \hat{x})^2}} - \frac{\gamma_2}{\sqrt{\gamma_1^2 - (\hat{h}_{id} - \hat{x})^2}} + 1 \right) (\hat{h}_{id} - \hat{x}) \quad (17)$$

رابطه (۱۷)، وابستگی پارامتریک بین نیروی بازگرداننده بدون بعد ( $\hat{F}$ ) و جابجایی بدون بعد ( $\hat{x}$ ) را نشان می‌دهد. موقعیت تعادل استاتیکی به‌ازای برابر صفر قراردادن رابطه (۱۷)، به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\hat{x}_e = \hat{h}_{id} \quad (18)$$

برای ایجاد یک سیستم با سختی صفر، لازم است مقدار سختی را در موقعیت تعادل استاتیکی دانست که سختی فنر عمودی با آن تنظیم شود. به این منظور، ابتدا مشتق رابطه (۱۸) به دست می‌آید:

$$\hat{K} = \frac{K}{k_h} = 2 \left( \frac{(\hat{h}_{id} - \hat{x})^2 (\gamma_2 - 1)}{(\gamma_1^2 - (\hat{h}_{id} - \hat{x})^2)^{3/2}} - \frac{(1 - \gamma_2) + \sqrt{\gamma_1^2 - (\hat{h}_{id} - \hat{x})^2}}{\sqrt{\gamma_1^2 - (\hat{h}_{id} - \hat{x})^2}} \right) \quad (19)$$

با جایگذاری  $\hat{x}_e = \hat{h}_{id}$  در رابطه (۱۹)، سختی معادل بدون بعد در موقعیت تعادل استاتیکی ( $\hat{K}_{SEP}$ ) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\hat{K}_{SEP} = \frac{K}{k_h} = 2 \left( \frac{\gamma_2 - \gamma_1 - 1}{\gamma_1} \right) \quad (20)$$

روابط (۱۹) و (۲۰) به ترتیب میزان سختی را در راستای عمودی بر حسب پارامترهای هندسی و موقعیت سیستم بیان می‌کند. با استفاده از این روابط می‌توان در هر نقطه  $x$  از حالت تعادل، سختی معادل را به دست آورد. همچنین رابطه (۲۰) میزان سختی را در نقطه تعادل به دست می‌دهد.

## ۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی رابطه سختی منفی یک مکانیزم شامل سه عضو و دو فنر پرداخته شده است. با این که فنرهایی که در مکانیزم استفاده شده است خاصیت خطی دارند، اما به خاطر نوع نیروهایی که فنرها در جهت عمودی وارد می‌کنند، نیروی بازگرداننده فنرها در جهت عمودی به صورت غیرخطی خواهد بود و در نتیجه سختی معادل در جهت عمودی غیرخطی خواهد شد. روابط مربوط به نیروی عمودی استخراج شد و در نهایت میزان سختی کل مجموعه بر حسب پارامترهای سیستم در نقطه تعادل به دست آمد.

## مراجع

1. Alabuzhev P (1989) Vibration Protection and Measuring Systems with Quasi-Zero Stiffness. Boca Raton, FL: CRC Press.
2. Snowdon JC (1979) Vibration isolation: use and characterization. Journal of the Acoustical Society of America 66: 1245-1274.
3. Wang Y and Lakes R (2004) Extreme stiffness systems due to negative stiffness elements. American Journal of Physics 72: 40-50.
4. Carrella A, Brennan MJ and Waters TP (2007b) Static analysis of a passive vibration isolator with quasi-zero stiffness characteristic. Journal of Sound and Vibration 301: 678-689.
5. Lan C-C, Yang S-A and Wu Y-S (2014) Design and experiment of a compact quasi-zero-stiffness isolator capable of a wide range of loads. Journal of Sound and Vibration 333: 4843-4858.

6. Niu F, Meng L, Wu W, et al. (2014) Design and analysis of a quasi-zero stiffness isolator using a slotted conical disk spring as negative stiffness structure. *Journal of Vibroengineering* 16: 1769–1785.
7. Xu J and Sun X (2015) A multi-directional vibration isolator based on Quasi-Zero-Stiffness structure and time-delayed active control. *International Journal of Mechanical Sciences* 100: 126–135.
8. Fulcher BA, Shahan DW, Haberman MR, et al. (2014) Analytical and experimental investigation of buckled beams as negative stiffness elements for passive vibration and shock isolation systems. *Journal of Vibration and Acoustics* 136: 031009.
9. Huang X, Liu X, Sun J, et al. (2014) Vibration isolation characteristics of a nonlinear isolator using Euler buckled beam as negative stiffness corrector: a theoretical and experimental study. *Journal of Sound and Vibration* 333: 1132–1148.
10. Lee C-M, Goverdovskiy VN and Temnikov AI (2007) Design of springs with “negative” stiffness to improve vehicle driver vibration isolation. *Journal of Sound and Vibration* 302: 865–874.
11. Shan Y, Wu W and Chen X (2015) Design of a miniaturized pneumatic vibration isolator with high-static-low-dynamic stiffness. *Journal of Vibration and Acoustics* 137: 045001.
12. Wu W, Chen X and Shan Y (2014) Analysis and experiment of a vibration isolator using a novel magnetic spring with negative stiffness. *Journal of Sound and Vibration* 333: 2958–2970.
13. Xu D, Yu Q, Zhou J, et al. (2013) Theoretical and experimental analyses of a nonlinear magnetic vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic. *Journal of Sound and Vibration* 332: 3377–3389.
14. Van Eijk J and Dijkman JF (1979) Plate spring mechanism with constant negative stiffness. *Mechanism and Machine Theory* 14: 1–9.
15. Bazant ZP, Cedolin L and Tabbara MR (1991) New method of analysis for slender columns. *ACI Structural Journal* 88: 391–401.
16. Weber F, Boston C and Mas' lanka M (2011) An adaptive tuned mass damper based on the emulation of positive and negative stiffness with an MR damper. *Smart Materials and Structures* 20: 015012.
17. Drugan W (2007) Elastic composite materials having a negative stiffness phase can be stable. *Physical Review Letters* 98: 055502.
18. Molyneux W (1957) Supports for Vibration Isolation. ARC/ CP-322. Available at: <http://naca.central.cranfield.ac.uk/reports/arc/cp/0322.pdf>
19. Huang X, Liu X, Sun J, et al. (2014) Vibration isolation characteristics of a nonlinear isolator using Euler buckled beam as negative stiffness corrector: a theoretical and experimental study. *Journal of Sound and Vibration* 333: 1132–1148.
20. Shi X and Zhu S (2017) Simulation and optimization of magnetic negative stiffness dampers. *Sensors and Actuators A: Physical* 259: 14–33.
21. Carrella A, Brennan MJ, Waters TP, et al. (2008) On the design of a high-static-low-dynamic stiffness isolator using linear mechanical springs and magnets. *Journal of Sound and Vibration* 315: 712–720.
22. Zheng Y, Zhang X, Luo Y, et al. (2016) Design and experiment of a high-static-low-dynamic stiffness isolator using a negative stiffness magnetic spring. *Journal of Sound and Vibration* 360: 31–52.
23. Easu D and Siddharthan A (2013) Theoretical and experimental analysis of a vibration isolation system using hybrid magnet. *Procedia Engineering* 64: 1139–1146.
24. Mizuno T, Toumiya T and Takasaki M (2003) Vibration isolation system using negative stiffness. *JSME International Journal Series C Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing* 46: 807–812.