



اثر نیروی محوری بر ارتعاشات آزاد پوسته استوانه ای کامپوزیتی

رضا آذرافزا^{۱*}، علی داور^۱، مجید قدیمی^۲

^۱ ایران، تهران، لویزان، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، مجتمع دانشگاهی مواد و فناوریهای ساخت، ۱۷۷۴-۱۵۸۷۵، دانشیار

^۲ ایران، تهران، لویزان، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، مجتمع دانشگاهی مواد و فناوریهای ساخت، دانشجوی دکتری

*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: azarkntu@yahoo.com , azarmut@mut.ac.ir

چکیده

امروزه پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی بعلت خواص مطلوبشان مانند استحکام ویژه و سفتی ویژه، کاربردهای زیادی در صنایع مختلف از جمله: خودروسازی، دریایی و هوافضایی پیدا کرده اند. در اکثر موارد، این پوسته‌ها تحت بارهای دینامیکی قرار دارند و ممکن است دچار ارتعاش، کمانش و خستگی شوند. به همین دلیل در این مقاله ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چند لایه و اثر بار محوری فشاری بر فرکانسها آنها بررسی شده است. ابتدا معادلات تعادل پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پوسته‌ها نوشته شده‌اند. روابط کرنش-تغییر مکان و انحناء-تغییر مکان بر مبنای تقریب اول لایه در نظر گرفته شده اند. شرایط مرزی به صورت دوسر ساده می‌باشد. سپس تحلیل بارکمانشی و ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی انجام شده و بار کمانشی و فرکانس‌های طبیعی استخراج شده‌اند. در نهایت اثر بار محوری فشاری و نسبت طول به شعاع بر روی فرکانس‌های طبیعی پوسته بررسی شده اند. نتایج نشان می‌دهد با افزایش بار محوری فشاری و افزایش نسبت طول به شعاع فرکانسهای طبیعی کاهش میابند. در تعداد کم موج محیطی (n)، افزایش نیم موج طولی (m)، اثر زیادی بر فرکانس طبیعی دارد در حالیکه در تعداد زیاد موج محیطی، افزایش نیم موج طولی اثری روی فرکانس طبیعی ندارد.

کلمات کلیدی: ارتعاشات آزاد، فرکانسهای طبیعی، بار محوری.

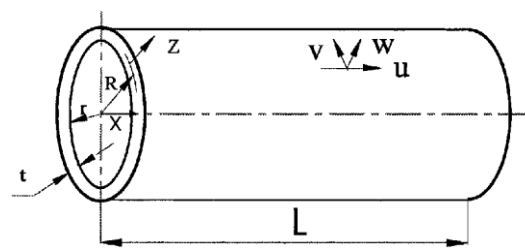
۱- مقدمه

پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی، سازه‌هایی هستند که از کاربرد زیادی در صنعت مانند: توربین‌های گازی، کوره‌های دوار، بدنه هواپیماها، فضاپیماها، موشکها، زیردریایی‌ها، تانکرها، خودرو، مخازن تحت فشار و بسیاری صنایع دیگر برخوردارند. در اکثر موارد گفته شده، پوسته‌ها تحت بارهای دینامیکی قرار دارند و ممکن است دچار ارتعاش، کمانش و خستگی شوند. دانش خصوصیات ارتعاشات پوسته‌های چند لایه، هم برای درک عمومی از مبانی رفتار یک پوسته و هم بمنظور فهم کاربردهای صنعتی پوسته‌ها بسیار مهم است. در ارتباط با مفهوم کاربرد صنعتی، بایستی فرکانس‌های طبیعی پوسته بمنظور جلوگیری از اثر تشدید شناخته شوند. اهمیت پیشگویی دقیق خواص ارتعاشی بخاطر صرفه-جویی در وزن، بطور فزاینده‌ای در طراحی سازه‌های هوافضایی کامپوزیتی رو به رشد

است. همچنین گاهی اوقات در صنعت مواردی پیش می‌آید که لازم است مقدار تغییر شکلها و تغییر مکانهای سازه را تحت اثر یک نیروی محرک خارجی بدانیم. بعنوان مثال المانهای هدایت و کنترل را می‌توان نام برد. بعضی از این المانها به شدت نسبت به ارتعاش حساس می‌باشند و در اثر ارتعاش کارایی آنها پایین می‌آید و حتی در مواردی ممکن است کارایی خود را از دست دهند. برای جلوگیری از چنین حالتی، لازم است ارتعاش سازه تا حد ممکن شناخته و کنترل شود. در خصوص ارتعاش آزاد پوسته‌های استوانه‌ای تحقیقات زیادی انجام شده است. آذرافزا و همکاران [۱] بهینه‌سازی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چند لایه تحت بار محوری فشاری و بار جانبی عرضی را بررسی نمودند. اکسی و همکاران [۲] اثرات غیرخطی برش را روی ارتعاشات آزاد پوسته‌های کامپوزیتی لایه‌ای دورانی، بر اساس تئوری راینر و با استفاده از روش نیمه تحلیلی برای شرایط مرزی مختلف بررسی کرده‌اند. کدیور و سامانی [۳] ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم کامپوزیتی دوار دو سر ساده را بر اساس روش ناویر و تئوری لایه‌ای و استفاده از روش انرژی، بررسی کردند. یاداو و ورما [۴] آنالیز ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای دایروی کامپوزیتی دارای تکیه‌گاه ساده را با پراکندگی در خواص مواد بررسی کردند. از تئوری راینر استفاده شده و حل بصورت عددی گردیده است. خلیلی و همکاران [۵] پاسخ دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چند لایه با تنش اولیه را تحت ایمپالس شعاعی را بررسی نمودند. سولداتوس و مسینا [۶] اثر شرایط مرزی لبه‌ای را بر روی پارامترهای ارتعاشی صفحات، پوسته‌های استوانه‌ای بسته و پانل‌های استوانه‌ای باز کامپوزیتی با لایه-چینی Angle-Ply دلخواه و دارای قابلیت تغییر شکل برشی عرضی بررسی کردند. درویزه و همکاران [۷] اثرات شرایط مرزی بر روی پایداری دینامیکی استوانه‌های ارتوتروپیک با استفاده از آنالیز دقیق اصلاح یافته و با در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل برش عرضی و اینرسی دورانی را مطالعه نمودند. آنها از تئوری پوسته لاواستفاده کردند. بوچانان و یی [۸] اثر شرایط مرزی متقارن را روی ارتعاشات استوانه‌های توخالی جدار ضخیم بررسی کرده و فرکانسها را بدست آوردند. ژائو و همکاران [۹] آنالیز ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای Cross-ply دوار را با تقویت کننده‌های طولی و محیطی با تکیه‌گاه ساده بر اساس تئوری تقریب مرتبه اول لاو با استفاده از روش انرژی بررسی کردند. لم و لوی [۱۰] اثر شرایط مرزی بر روی ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای چند لایه را بررسی کردند. همانطوریکه مشاهده می‌شود اثر بار محوری بر ارتعاشات آزاد بررسی نشده است که در این مقاله این موضوع بررسی خواهد شد.

۲- معادلات حاکم

شکل (۱) یک پوسته استوانه‌ای با شعاع متوسط R ، ضخامت t و طول L را نشان می‌دهد. w, v, u مولفه‌های تغییر مکان در جهت‌های محوری (X)، محیطی (ϕ) و شعاعی (Z) می‌باشند. بر اساس تئوری تغییر شکل برسی مرتبه اول، معادلات تعادل عبارتند از [۱]:



شکل ۱. پوسته استوانه‌ای و مختصات مرجع

$$R \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\phi x}}{\partial \phi} = R \left[I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} \right] \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_{\phi}}{\partial \phi} + R \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} + Q_{\phi} + R N_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = R \left[(I_1 + \frac{2I_2}{R}) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (I_2 + \frac{I_3}{R}) \frac{\partial^2 \beta_{\phi}}{\partial t^2} \right]$$

$$R \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} - N_\phi + R N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = R I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$R \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{x\phi}}{\partial \phi} - R Q_x = R (I_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2})$$

$$\frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} + R \frac{\partial M_{x\phi}}{\partial x} - R Q_\phi = R \left[(I_2 + \frac{I_3}{R}) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \beta_\phi}{\partial t^2} \right]$$

معادلات متشکله پوسته‌های کامپوزیتی بر اساس تئوری کلاسیک لایه‌ها بصورت زیر تعریف می‌شوند [۵]:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_\theta^\circ \\ \gamma_{x\theta}^\circ \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x^\circ \\ k_\theta^\circ \\ k_{x\theta}^\circ \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_\theta^\circ \\ \gamma_{x\theta}^\circ \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x^\circ \\ k_\theta^\circ \\ k_{x\theta}^\circ \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{55} & H_{45} \\ H_{45} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^\circ \\ \gamma_{\theta z}^\circ \end{Bmatrix}$$

که در آن I_1 ، I_2 و I_3 به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\left\{ (I_1, I_2, I_3) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_k (1, z, z^2) dz \right. \quad (3)$$

همچنین ماتریسهای A ، B ، D و H به ترتیب ماتریسهای سفتی محوری، سفتی کوپل، سفتی خمشی و سفتی برشی می باشند و عبارتند از:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} (1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (4)$$

$$(H_{ij}) = k_\circ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} dz \quad (i, j = 4, 5)$$

در این روابط h_k فاصله لایه k ام از سطح میانی و \bar{Q}_{ij} عبارتست از ماتریس سفتی تبدیل یافته کاهش یافته برای لایه k ام می‌باشند.

k_\circ به عنوان فاکتور تصحیح برش در نظر گرفته می شود که مقدار آن برابر $\frac{\pi^2}{12}$ است [۵]. ε_x° ، ε_θ° و $\varepsilon_{x\theta}^\circ$ کرنشهای سطح میانی،

k_x° ، k_θ° و $k_{x\theta}^\circ$ انحناهای سطح میانی و γ_{xz}° و $\gamma_{\theta z}^\circ$ کرنشهای برشی می‌باشند و بصورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_\theta^\circ \\ \gamma_{x\theta}^\circ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^\circ \\ k_\theta^\circ \\ k_{x\theta}^\circ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_x}{\partial \theta} + \frac{\partial \beta_\theta}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^\circ \\ \gamma_{\theta z}^\circ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

β_θ و β_x شیبهای پوسته به ترتیب در صفحه $(x-z)$ و $(\phi-z)$ می باشند.

۳- روش حل

شرایط مرزی برای یک پوسته استوانه‌ای با تکیه گاه دو سر ساده در $x=0$ و $x=L$ بصورت زیر تعریف می‌شوند [۱]:

$$\begin{aligned} N_x(0, \theta, t) = N_x(L, \theta, t) = M_x(0, \theta, t) = M_x(L, \theta, t) = 0 \\ w(0, \theta, t) = w(L, \theta, t) = v(0, \theta, t) = v(L, \theta, t) = \beta_\theta(0, \theta, t) = \beta_\theta(L, \theta, t) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

به منظور ارضای شرایط مرزی دو سر ساده $\beta_\theta, \beta_x, w, v, u$ بصورت سریهای فوریه دوگانه زیر تعریف می‌شوند [۱]:

$$\begin{aligned} u &= \sum_m \sum_n A_{mn} \cos \frac{m \pi x}{L} \cos n \theta T_{mn}(t) , \quad v = \sum_m \sum_n B_{mn} \sin \frac{m \pi x}{L} \sin n \theta T_{mn}(t) \\ w &= \sum_m \sum_n C_{mn} \sin \frac{m \pi x}{L} \cos n \theta T_{mn}(t) , \quad \beta_x = \sum_m \sum_n D_{mn} \cos \frac{m \pi x}{L} \cos n \theta T_{mn}(t) \\ \beta_\theta &= \sum_m \sum_n E_{mn} \sin \frac{m \pi x}{L} \sin n \theta T_{mn}(t) \end{aligned} \quad (7)$$

$A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}, E_{mn}$ ضرایب شکل مود هستند. m تعداد نیم موجهای طولی، n تعداد موجهای محیطی می‌باشند.

۴- آنالیز کمانش

برای بدست آوردن بار کمانشی حل استاتیکی انجام می‌شود (ترم زمان در نظر گرفته نمی‌شود). با استفاده از روابط (۷) و جایگزینی آنها در معادلات تعادل یعنی رابطه (۱)، پس از ساده سازی دستگاه معادلات زیر بدست می‌آید:

$$[C_{ij}] \{A_{mn} \ B_{mn} \ C_{mn} \ D_{mn} \ E_{mn}\}^T = 0 \quad (i, j = 1, \dots, 5) \quad (8)$$

با قرار دادن دترمینان ضرایب $[C_{ij}]$ مساوی صفر، معادله بار کمانشی بدست می‌آید:

$$\gamma_1 N^2 + \gamma_2 N + \gamma_3 = 0 \quad (9)$$

که γ_i ها ضرایب ثابت و N بار کمانش می‌باشند. از حل این معادله، بار کمانشی پوسته نظیر m و n های مختلف بدست می‌آیند.

۵- آنالیز ارتعاشات آزاد

برای حل ارتعاشات آزاد $T_{mn}(t) = e^{i \omega_{mn} t}$ در نظر گرفته می‌شود که ω_{mn} فرکانس طبیعی است. با در نظر گرفتن بار محوری فشاری مساوی یا کسری از بار بحرانی کمانش، فرکانسهای طبیعی بدست می‌آیند. با اعمال روش مشابه با آنالیز کمانشی، پس از ساده سازی معادله فرکانسی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\beta_1 \omega_{mn}^{10} + \beta_2 \omega_{mn}^8 + \beta_3 \omega_{mn}^6 + \beta_4 \omega_{mn}^4 + \beta_5 \omega_{mn}^2 + \beta_6 = 0 \quad (10)$$

که β_i ها ضرایب ثابت می‌باشند. از حل معادله فرکانسی، فرکانسها بدست می‌آیند و با قرار دادن فرکانسها در معادله تعادل ضرایب ثابت شکل مودها بدست می‌آیند.

۶- نتایج و بحث

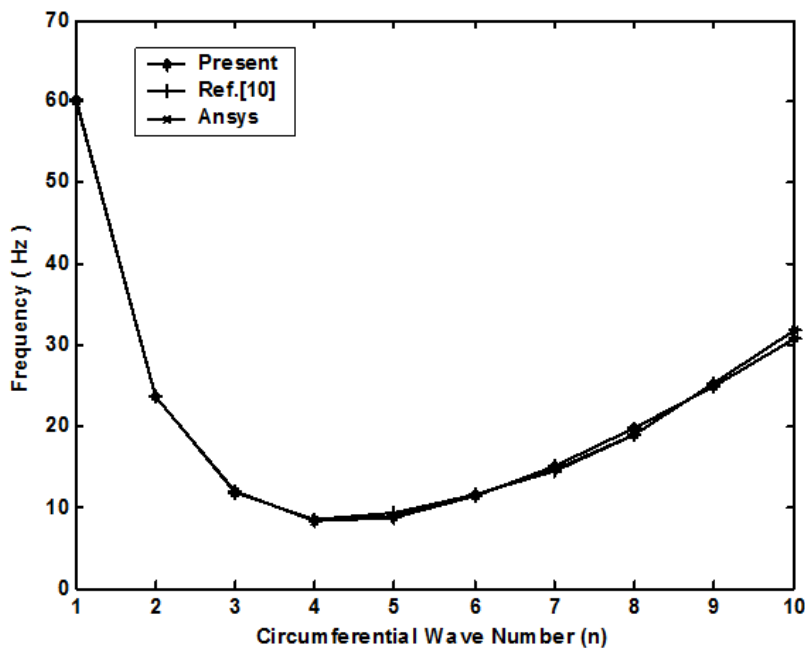
برای بررسی صحت آنالیز کمانشی در جدول (۱) نتیجه تحلیل حاضر با نرم افزار ANSYS مقایسه شده است. همانطوریکه مشاهده می‌شود درصد خطا برابر ۳/۲ می‌باشد که دلیل بر درستی نتایج می‌باشد. پوسته مورد استفاده در جدول (۱) با شرایط مرزی دو سر ساده از جنس ایزوتروپیک با خواص زیر می‌باشد: $E = 200GPa$, $\nu = 0.3$, $t = 1mm$, $R = 304mm$, $L = 750mm$

جدول ۱. مقایسه روش تحلیلی حاضر با نرم افزار ANSYS

روش حل	موج محیطی (n)	نیم موج طولی (m)	بارکمانش (N/mm)	درصد خطا
روش تحلیلی حاضر	۱۲	۴	۳۸۸	-
روش نرم افزاری	۱۲	۴	۴۰۱	۳/۲

همچنین در شکل (۲) برای صحت آنالیز ارتعاشات آزاد، نتایج فرکانسهای بدست آمده از این روش با مرجع و نرم افزار مقایسه شده اند. همانطوریکه مشاهده می‌شود نتایج روش حاضر با مرجع و نرم افزار تطابق خوبی دارد. خواص کامپوزیت به صورت زیر می‌باشد.

$$E_{11} = 19GPa, E_{22} = 7.6GPa, G_{12} = G_{13} = 4.1GPa, G_{23} = 1.43GPa, \nu_{12} = 0.26, \rho = 1643Kg/m^2$$



شکل ۲. مقایسه فرکانسهای طبیعی پوسته با شرایط مرزی دو سر ساده، $m=1$ ، لایه چینی $[90/0/90]$ ضخامت لایه ها برابر می باشد، $R=1m$ ، $L=6m$ ، $h=0.002m$.

برای بررسی نتایج (شکل‌های زیر)، شرایط مرزی پوسته کامپوزیتی به صورت دو سر ساده و خواص هندسی و مکانیکی آن به صورت زیر می باشد. همچنین فرض شده پوسته کامپوزیتی دارای ۴ لایه بوده و ضخامت لایه ها برابر می‌باشد.

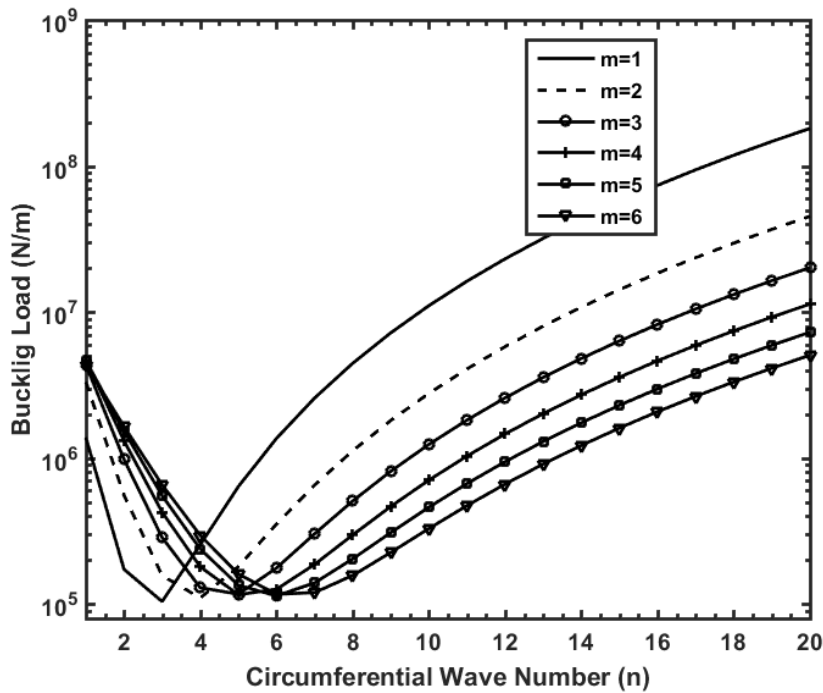
$$E_{11} = 172.369GPa, E_{22} = 6.895GPa, G_{12} = G_{13} = 3.448GPa, G_{23} = 1.37GPa, \nu_{12} = 0.25, \rho = 1603Kg/m^2$$

$$R = 0.5m, L = 4m, h = 0.003m$$

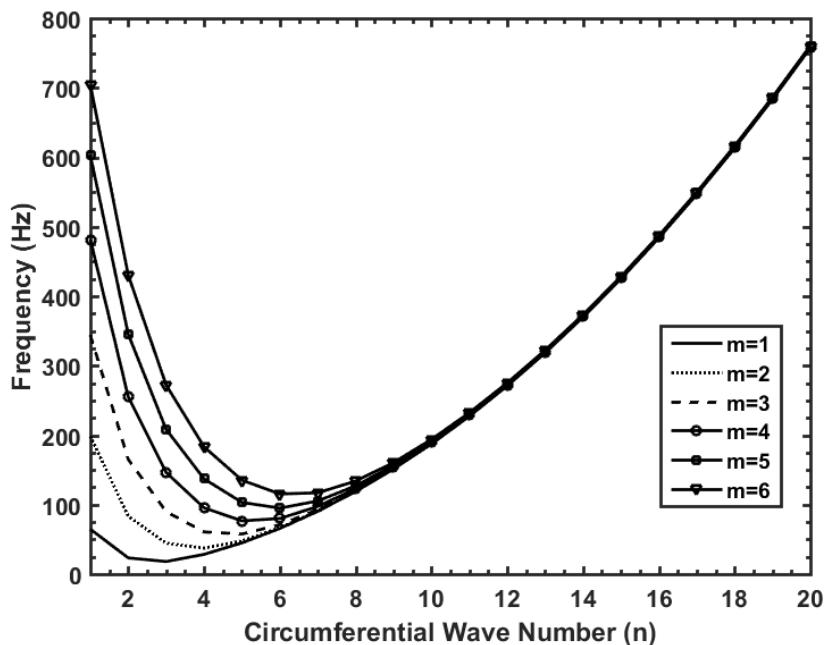
در شکل (۳)، نمودار بار کمانشی بر حسب عدد موج محیطی (n) برای مقادیر مختلف نیم موج طولی (m)، برای یک پوسته دو سر رسم شده است. بار بحرانی کمانش N_{cr} عبارتست از می‌نیمم مقدار بار کمانش که در شکل (۳)، در $m=1$ و $n=3$ اتفاق می‌افتد. مقدار این بار برابر $N_{cr} = 33.22 [N/mm]$ می باشد. با افزایش نیم موج طولی (m)، بار بحرانی کمانش پوسته کامپوزیتی افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش m، در ابتدا بار کمانشی کاهش یافته تا به مقدار بحرانی برسد، سپس افزایش می‌یابد.

در شکل (۴)، نمودار فرکانس‌های طبیعی پوسته بر حسب عدد موج محیطی (n) برای مقادیر مختلف نیم موج طولی (m)، برای یک پوسته دو سر ساده رسم شده اند. همانطوریکه مشاهده می‌شود فرکانس طبیعی پایه پوسته برابر $\omega_n = 18.17 [Hz]$ می باشد که در $m=1$ و $n=3$ اتفاق می‌افتد. همچنین مشاهده می‌شود، در تعداد کم موج محیطی (n)، افزایش نیم موج طولی (m)،

بسیار موثر است در حالیکه در تعداد زیاد موج محیطی، افزایش نیم موج طولی اثری روی فرکانس طبیعی ندارد. همچنین با افزایش نیم موج طولی (m)، مقدار فرکانس طبیعی پایه پوسته کامپوزیتی افزایش می‌یابد.



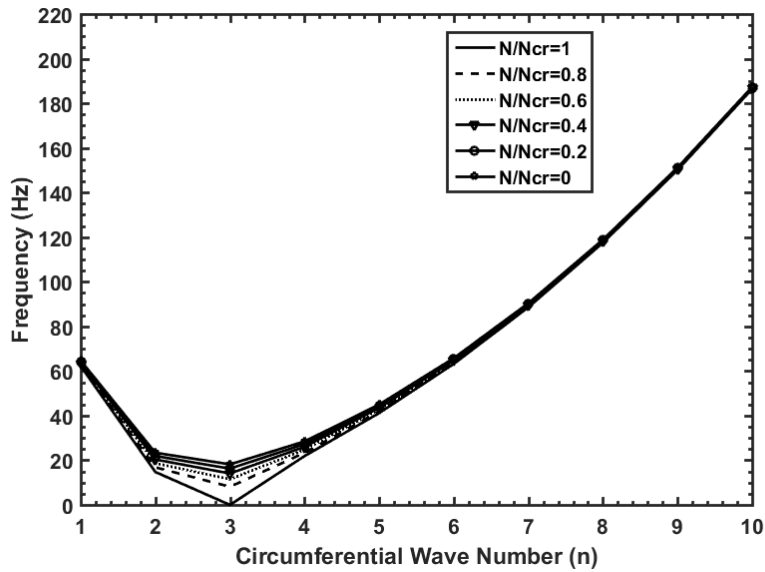
شکل ۳. بار کمانش پوسته برای مقادیر مختلف m



شکل ۴. فرکانس بار کمانش پوسته برای مقادیر مختلف m

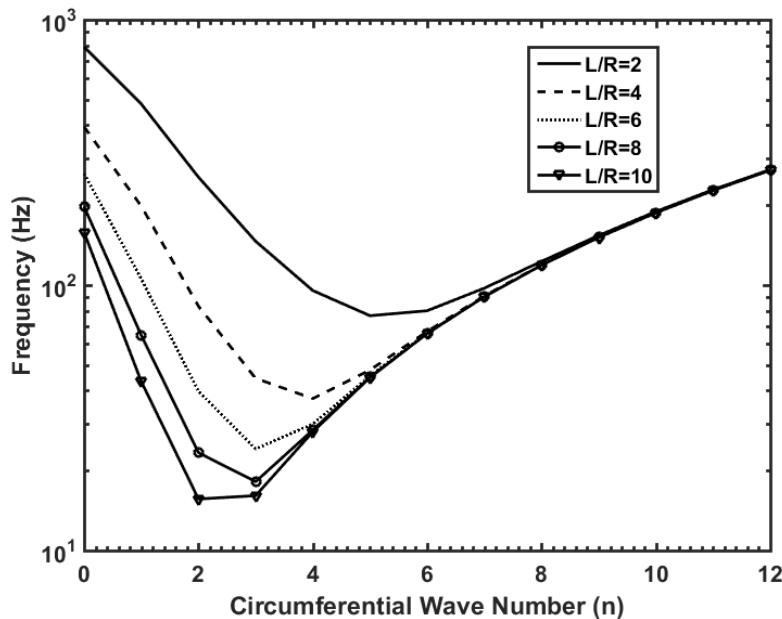
در شکل (۵)، اثر بار محوری فشاری (که به صورت کسری از بار بحرانی کمانش پوسته می‌باشد)، بر مقدار فرکانس طبیعی آن نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش بار محوری فشاری، فرکانس طبیعی پایه کاهش می‌یابد. همچنین همانطور که انتظار

می رود در $m=1$ و $n=3$ وقتی که نیروی محوری برابر با بار بحرانی کمانش می شود، مقدار فرکانس طبیعی پایه برابر با صفر می گردد.



شکل ۵. اثر بار محوری فشاری بر فرکانس های طبیعی پوسته

در شکل (۶)، اثر نسبت طول به شعاع (L/R) بر روی فرکانس طبیعی پوسته بررسی شده است. همانطوریکه مشاهده می شود، با افزایش نسبت طول به شعاع، فرکانس طبیعی کاهش می یابد. برای نسبت $\frac{L}{R} = 2$ فرکانس طبیعی پایه برابر $\omega_n = 77 [Hz]$ که در $m=1$ و $n=5$ ، و برای برای نسبت $\frac{L}{R} = 10$ فرکانس طبیعی پایه برابر $\omega_n = 15.6 [Hz]$ که در $m=1$ و $n=2$ اتفاق می افتد، یعنی با ۵ برابر شدن طول پوسته، فرکانس طبیعی آن حدوداً ۸۰٪ کاهش می یابد و مود محیطی که فرکانس طبیعی پایه در آنها اتفاق می افتد کم خواهد شد.



شکل ۶. اثر نسبت طول به شعاع بر فرکانس های طبیعی پوسته

۷- نتیجه گیری

- ۱- همانطوریکه انتظار می‌رفت هنگامیکه بار محوری فشاری وارد بر پوسته برابر بار بحرانی کمانش باشد، فرکانس طبیعی پایه برابر صفر خواهد شد.
- ۲- با ۵ برابر شدن طول پوسته فرکانس طبیعی پایه به اندازه ۸۰٪ کاهش می‌یابد.
- ۳- با افزایش طول پوسته، مود محیطی که فرکانس طبیعی پایه در آنها اتفاق می‌افتد، کم خواهد شد.
- ۴- در تعداد کم موج محیطی (n)، افزایش نیم موج طولی (m)، اثر زیادی بر فرکانس طبیعی دارد در حالیکه در تعداد زیاد موج محیطی، افزایش نیم موج طولی اثری روی فرکانس طبیعی ندارد.

مراجع

1. R. Azarafza, S.M.R. Khalili, A.A. Jafari, A. Davar, "Analysis and Optimization of laminated composite circular cylindrical shell subjected to compressive axial and transverse transient dynamic loads", *Thin-Walled Structures*, 47, 970-983 (2009).
2. Z.C. Xi, L.H. Yam, T.P. Leung, "Free vibration of a laminated composite shell of revolution: Effects of shear non-linearity", *Int. J. of Mech. Sci.*, 41, 649-661 (1999).
3. M.H. Kadivar, K. Samani, "Free vibration of rotating thick composite cylindrical shells using layerwise laminate theory", *Mech. Research Comm.*, 27, 679-684 (2000).
4. D.Yadav , N. Verma , "Free vibration of composite circular cylindrical shell with random material properties. Part II: Applications", *Composite structures*, 51, 371-380 (2001).
5. S.M.R. Khalili, R. Azarafza, A. Davar, "Transient dynamic response of initially stressed composite circular cylindrical shell under radial impulse load", *Composite structures*, 89, 275-284 (2009).
6. K.P. Soldatos, A. Messina, "The influence of boundary conditions and transverse shear on the vibration of angle-ply laminated panels", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190, 2385-2409 (2001).
7. M. Darvizeh, A. Darvizeh, R. Ansari, C.B. Sharma, "The effect of boundary conditions on dynamic stability of orthotropic cylinders using modified exact analysis", *Proceeding of 10th Int. Conference of Mech.Eng. May*, 2002.
8. G.B. Buchanan , C.B.Y. Yii , "Effect of symmetrical boundary conditions on the vibration of thick hollow cylinder", *Applied Acoustics*, 63 547-566 (2002).
9. X. Zhao , K.M. Liew , T.Y. Ng , "Vibration of rotating cross-ply laminated circular cylindrical shell with stringer and ring stiffeners", *International journal of solids and structures*, 39, 529-545 (2002).
10. K.Y. Lam and C.T. Loy, "influence of boundary condition for a thin laminated rotating cylindrical shell", *Composite structures*, 41, 215-228 (1998).