



# ISAV2024

چهاردهمین کنفرانس بین المللی آکوستیک و ارتعاشات  
۲۱ و ۲۲ آذر ماه ۱۴۰۳ کرج - ایران



## تحلیل ارتعاشات آزاد ورق تاخوردۀ مواد مدرج تابعی بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول

نیما مهندسی<sup>۱\*</sup>، مصطفی طالبی توتی<sup>۲</sup>، محمد فدایی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup>ایران، قم، دانشگاه صنعتی قم، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشجوی دکتری

<sup>۲</sup>دانشیار، talebi@qut.ac.ir

<sup>۳</sup>دانشیار، fadaee@qut.ac.ir

\*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: mohandesi.n@qut.ac.ir

### چکیده

در این مطالعه ارتعاشات ورق تاخوردۀ از جنس مواد مدرج تابعی مورد بررسی قرار گرفت. مواد مدرج تابعی مواد نسبتاً جدید و پیشرفته با ساختاری ناهمگن هستند که خواص مکانیکی از سطحی به سطح دیگر به طور پیوسته تغییر می‌کند. ورق‌های تاخوردۀ به دلیل هزینه‌های ساخت پایین در صنعت بسیار پرکاربرد هستند. از جمله کاربردهایی که اخیراً ورق‌های تاخوردۀ پیدا کرده‌اند، استفاده‌ی ورق‌های تاخوردۀ در ساخت جنگنده‌های رادار گریز نسل پنجم می‌باشد. نخست ثابت‌های الاستیک و چگالی ورق تاخوردۀ از جنس مواد مدرج تابعی در نظر گرفته شد. با استفاده از اصل همیلتون، معادلات دینامیکی حاکم و شرایط مرزی در لبه‌ها برای دو ورق جدا از هم بدست آمد. با در نظر گرفتن شرایط پیوستگی در لبه‌ی تاخوردۀ، معادلات حاکم، شرایط مرزی و معادلات پیوستگی در هم دیگر تنیده شده‌اند. با استفاده از روش حل ترکیبی لوی-تفاضل مربعات این معادلات حل گردید و با استفاده از حل مسئله مقدار ویژه، فرکانس‌های طبیعی ورق تاخوردۀ مواد مدرج تابعی بدست آمد. ورق تاخوردۀ مواد مدرج تابعی در نرم‌افزار شبیه‌سازی بر پایه‌ی المان محدود تحلیل گردید. مقایسه نتایج المان محدود با حل ترکیبی لوی-تفاضل مربعات نشان داد که مدل سازی ریاضی این مسئله و روش حل تحلیلی از دقت خوبی برخوردار است.

کلمات کلیدی: مواد مدرج تابعی؛ ارتعاشات؛ ورق تاخوردۀ؛ روش تفاضل مربعات

## ۱- مقدمه

ورق‌های تاخوردۀ در صنایع مختلفی همانند صنعت هوافضا کاربرد فراوانی دارند. برجسته‌ترین مزیت ورق‌های تاخوردۀ نسبت به پوسته‌های منحنی شکل همانند پوسته‌ی استوانه‌ای، ساخت آسان و ارزان این سازه‌ها است به خصوص زمانی که جنس این سازه‌ها از مواد کامپوزیتی باشد. مواد مدرج تابعی (FGM)<sup>۱</sup> نوعی مواد کامپوزیتی با ریز ساختار ناهمگن می‌باشد که خواص مکانیکی آن به طور پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند و غالباً از مواد همسانگرد همانند فلز و سرامیک ساخته می‌شود. استفاده از فلزات می‌تواند عملکرد مکانیکی را بالا ببرد و استفاده از سرامیک‌ها می‌تواند مقاومت حرارتی را بهبود بخشد. اولین بار مفهوم (FGM) توسط کویزومی<sup>۲</sup> برای مقاومت حرارتی توسعه داده شد [۱]. با رشد روز افزون فناوری ساخت مواد پیشرفته همانند مواد مدرج تابعی به طور گسترده در صنایعی همانند هوافضا و مهندسی خودرو به کار گرفته شد [۲]. نظریه‌های مختلفی توسط دانشمندان برای بررسی رفتار ورق‌ها توسعه یافت. در نظر گرفتن اثر تغییر شکل برشی در مدل‌سازی و تحلیل ورق با ضخامت متوسط ضروری است. بر این اساس نظریه‌هایی مانند نظریه ورق میندلین<sup>۳</sup> و نظریه ورق ردی<sup>۴</sup> توسعه داده شده است. بر اساس نظریه‌های ورق، رفتار مکانیکی ورق‌ها همانند خمش [۳ و ۴] و ارتعاشات [۵ و ۶] در طی پژوهش‌هایی بررسی گردید. حل دقیق ارتعاشات ورق مستطیلی از مواد مدرج تابعی توسط حسینی‌هاشمی و همکاران استخراج گردید [۷]. براساس تئوری غیر محلی مرتبه‌ی بالا و با استفاده از روش حل المان محدود یک نانو صفحه از جنس ویسکوالاستیک مدل‌سازی شد و مورد تحلیل ارتعاشاتی قرار گرفت [۸]. پاسخ دینامیکی ورق کامپوزیتی مگنو الکترو الاستیک بر روی بستر ویسکو پاسترناک<sup>۵</sup> تحت بارگذاری انفجار بر اساس نظریه غیرمحلی مرتبه بالا بدست آمد [۹]. ارتعاشات آزاد یک ورق از مواد مدرج تابعی تقویت شده با لایه‌های گرافن، براساس نظریه مرتبه بالاتر برشی و با استفاده از روش حل المان محدود تحلیل شد [۱۰]. در پژوهشی دیگر، حل دقیقی برای ارتعاشات حرارتی ورق از مواد مدرج تابعی چند جهته غوطه‌ور در آب ارائه شد [۱۱]. تجزیه و تحلیل ارتعاش نانو تیرهای منحنی از مواد درجه بندی شده‌ی تابعی متخلخل روی بستر الاستیک با استفاده از روش عددی ریلی ریتز<sup>۶</sup> انجام شد [۱۲]. همچنین در پژوهشی دیگر رفتار دینامیکی ورق‌های تخت و تاشده در یک محیط گرمایی با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی غیر چند جمله‌ای بررسی شد [۱۳]. از یک نظریه مرتبه بالاتر ورق، برای تحلیل دینامیک گذرا صفحات کامپوزیت تاخوردۀ تحت بارگذاری مختلف استفاده شد [۱۴].

در این پژوهش به بررسی ورق تاخوردۀ مدرج تابعی بر اساس نظریه اول تغییر شکل برشی به روش حل ترکیبی لوی-تفاضل مربعات پرداخته شده است. با استفاده از نرم افزار کامسول ورق مورد نظر به روش المان محدود تحلیل شد و نتایج حاصل از روش تفاضل مربعات بر اساس نتایج حاصل از نرم افزار صحنه سنجی شد. همچنین اثر تغییر ضخامت ورق، تغییر طول و تغییر زاویه‌ی تاخوردگی بر فرکانس طبیعی ورق تاخوردۀ مواد مدرج تابعی بررسی گردید.

## ۲- ویژگی‌های هندسی و مادی ورق تاخوردۀ

ورق تاخوردۀ از مواد مدرج تابعی در نظر گرفته می‌شود. شکل (۱. الف) مواد مدرج تابعی را توصیف می‌کند. همانطور که نشان داده شده است جنس ورق از یک سطح به سطح دیگر از سرامیک به فلز تغییر جنس پیدا می‌کند. تغییر خواص ماده به مرور و با تغییر ضخامت ورق انجام می‌پذیرد و تنها در ابتدا و انتهای ضخامت ورق، خواص کاملاً مطابق با خواص سرامیک و یا خواص فلز می‌باشد.

<sup>1</sup> Functionally Graded Materials

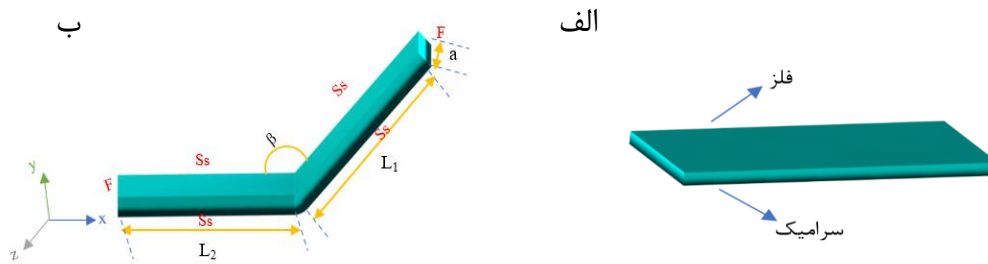
<sup>2</sup> Koizumi

<sup>3</sup> Mindlin

<sup>4</sup> Reddy

<sup>5</sup> Visco-Pasternak

<sup>6</sup> Rayleigh Ritz



شکل ۱. الف) شماتیکی از ماده‌ی FGM (ب) شماتیک و مشخصات هندسی ورق تاخورد

در شکل (۱. ب) یک ورق تاخورد از جنس مواد مدرج تابعی نشان داده شده است.  $L_1$  و  $L_2$  به ترتیب به طول قسمت اول و طول قسمت دوم ورق اشاره دارد. همچنین  $a$  نشان دهنده‌ی عرض ورق تاخورد می‌باشد. زاویه‌ی تاخوردگی ورق با  $\beta$  نشان داده شده است. شرایط مرزی در حل این مسئله به صورت دو انتها آزاد و چهار لبه دیگر به صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته می‌شود که به ترتیب لبه‌ی آزاد و تکیه‌گاه ساده در شکل با  $F$  و  $S_s$  نشان داده شده است. ثابت‌های الاستیک ورق FGM به صورت روابط (۱) محاسبه می‌شود.

$$E = (E_c - E_m) \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^n + E_m, \rho_1 = (\rho_c - \rho_m) \left( \frac{2z+h}{2h} \right) + \rho_m \quad (1)$$

$$G_1 = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

در روابط (۱)  $E, G, \rho, h$  و  $\nu$  به ترتیب نشان‌دهنده‌ی مدول یانگ، مدول برشی، چگالی، ضخامت ورق و ضریب پواسون می‌باشند. همچنین اندیس‌های  $c$  و  $m$  به ترتیب به ماده‌ی سرامیک و فلز اشاره دارند. درایه‌های ماتریس سفتی برای صفحه‌ی FGM براساس نظریه اول تغییر شکل برشی مطابق با رابطه‌ی (۲) بیان می‌شود.

$$Q_{k11} = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, Q_{k12} = \frac{\mu_{12}E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, Q_{k22} = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}},$$

$$Q_{k33} = G_{k12}, Q_{k44} = G_{k23}, Q_{k55} = G_{k13} \quad (2)$$

با استفاده از اصل کمینه‌سازی انرژی (اصل همیلتون<sup>۷</sup>)، معادلات حاکم بر ورق و شرایط مرزی در لبه‌های ورق بدست می‌آید که به صورت رابطه‌ی (۳) بیان می‌گردد.

$$\delta \int_0^t (U_k - T_k) dt = 0 \quad (3)$$

در رابطه‌ی (۳)،  $U_k$  و  $T_k$  به ترتیب بیانگر انرژی پتانسیلی و انرژی جنبشی می‌باشد. مقادیر انرژی جنبشی و پتانسیلی مطابق با رابطه‌ی (۴) بدست می‌آید.

<sup>7</sup> Hamilton Principle

$$U_k = \frac{1}{2} \int_0^{L_k} \int_0^a \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{x_k x_k} \varepsilon_{x_k x_k} + \sigma_{y_k y_k} \varepsilon_{y_k y_k} + \sigma_{x_k z_k} \varepsilon_{x_k z_k} + \sigma_{y_k z_k} \varepsilon_{y_k z_k}) dz dy dx, \quad (4)$$

$$T_k = \frac{1}{2} \int_0^{L_k} \int_0^a \int_{-h/2}^{h/2} \rho_k \left[ \left( \frac{\partial u_k}{\partial t} + z \frac{\partial \theta_{xk}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_k}{\partial t} + z \frac{\partial \theta_{yk}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_k}{\partial t} \right)^2 \right] dz dy dx,$$

با استفاده از روابط (۳) و (۴) و به کمک انتگرال‌گیری جز به جز پنج معادله‌ی حاکم برای قسمت‌های مختلف ورق مطابق با روابط (۵) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{x_k x_k}}{\partial x} + \frac{\partial N_{x_k y_k}}{\partial y} &= J_{k1} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + J_{k2} \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial N_{y_k y_k}}{\partial y} + \frac{\partial N_{x_k y_k}}{\partial x} &= J_{k1} \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} + J_{k2} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Q_{xk}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yk}}{\partial y} + S_w W_k - S_p \nabla^2 w_k &= J_{k1} \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_{x_k x_k}}{\partial x} + \frac{\partial M_{x_k y_k}}{\partial y} - Q_{xk} &= J_{k2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + J_{k3} \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_{y_k y_k}}{\partial y} + \frac{\partial M_{x_k y_k}}{\partial x} - Q_{yk} &= J_{k2} \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} + J_{k3} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

در معادله‌ی (۵)،  $N$ ها و  $M$ ها به ترتیب به نتیجه‌های نیرو و ممان اشاره دارند که مطابق با رابطه‌ی (۶) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} (N_{x_k x_k} \quad N_{x_k y_k} \quad N_{y_k y_k}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{x_k x_k} \quad \sigma_{x_k y_k} \quad \sigma_{y_k y_k}) dz \\ (M_{x_k x_k} \quad M_{x_k y_k} \quad M_{y_k y_k}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{x_k x_k} \quad \sigma_{x_k y_k} \quad \sigma_{y_k y_k}) \times z dz \\ (Q_{x_k} \quad Q_{y_k}) &= k_s \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{x_k z_k} \quad \sigma_{y_k z_k}) dz \end{aligned} \quad (6)$$

در رابطه‌ی فوق  $K_s$  ضریب تصحیح برشی می‌باشد و برابر با  $5/6$  می‌باشد. همچنین ممان‌های اینرسی مطابق با رابطه‌ی (۷) بدست می‌آید.

$$(J_{k1} \quad J_{k2} \quad J_{k3}) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho_k (1 \quad z \quad z^2) dz \quad (7)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۶) در رابطه‌ی (۵) رابطه‌ی (۸) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{R}_{11} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2} + \mathbb{R}_{33} \frac{\partial^2 u_k}{\partial y_k^2} + (\mathbb{R}_{12} + \mathbb{R}_{33}) \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k \partial y_k} + \mathbb{R}_{11z} \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial x_k^2} + \mathbb{R}_{33z} \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial y_k^2} + (\mathbb{R}_{12z} + \mathbb{R}_{33z}) \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial x_k \partial y_k} = \\
 & J_{k1} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + J_{k2} \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial t^2}, \\
 & (\mathbb{R}_{12} + \mathbb{R}_{33}) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial y_k} + \mathbb{R}_{33} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k^2} + \mathbb{R}_{22} \frac{\partial^2 v_k}{\partial y_k^2} + (\mathbb{R}_{12z} + \mathbb{R}_{33z}) \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial x_k \partial y_k} + \mathbb{R}_{33z} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial x_k^2} + \mathbb{R}_{22z} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial y_k^2} = \\
 & J_{k1} \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} + J_{k2} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial t^2} \\
 & R_{44} \left( \frac{\partial \theta_{xk}}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial x_k^2} \right) + R_{55} \left( \frac{\partial \theta_{yk}}{\partial y_k} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial y_k^2} \right) + S_w w_k - S_p \nabla^2 w_k = J_{k1} \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} \\
 & \mathbb{R}_{11z} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2} + \mathbb{R}_{33z} \frac{\partial^2 u_k}{\partial y_k^2} + (\mathbb{R}_{12z} + \mathbb{R}_{33z}) \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k \partial y_k} + \mathbb{R}_{11zz} \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial x_k^2} + \mathbb{R}_{33zz} \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial y_k^2} + \\
 & (\mathbb{R}_{12zz} + \mathbb{R}_{33zz}) \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial x_k \partial y_k} - \mathbb{R}_{44} \left( \theta_{xk} + \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \right) = (\mathbb{R}_{12z} + \mathbb{R}_{33z}) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial y_k} + \\
 & \mathbb{R}_{33z} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k^2} + \mathbb{R}_{22z} \frac{\partial^2 v_k}{\partial y_k^2} + (\mathbb{R}_{12zz} + \mathbb{R}_{33zz}) \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial x_k \partial y_k} + \mathbb{R}_{33zz} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial x_k^2} + \\
 & \mathbb{R}_{22zz} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial y_k^2} - \mathbb{R}_{55} \left( \theta_{yk} + \frac{\partial w_k}{\partial y_k} \right) = J_{k2} \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} + J_{k2} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial t^2}. \\
 & (\mathbb{R}_{12z} + \mathbb{R}_{33z}) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial y_k} + \mathbb{R}_{33z} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k^2} + \mathbb{R}_{22z} \frac{\partial^2 v_k}{\partial y_k^2} + (\mathbb{R}_{12zz} + \mathbb{R}_{33zz}) \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial x_k \partial y_k} + \mathbb{R}_{33zz} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial x_k^2} + \\
 & \mathbb{R}_{22zz} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial y_k^2} - \mathbb{R}_{55} \left( \theta_{yk} + \frac{\partial w_k}{\partial y_k} \right) = J_{k2} \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} + J_{k3} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial t^2} \tag{۸}
 \end{aligned}$$

در جایی که

$$(\mathbb{R}_{ij} \quad \mathbb{R}_{ijz} \quad \mathbb{R}_{ijzz}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{kij} (1 - z^2) dz, i, j = 1, 2, \dots, 5 \tag{۹}$$

اصل همیلتون علاوه بر معادلات حاکم بر ورق، شرایط مرزی را در لبه‌های ورق تعیین می‌کند. با استفاده از این اصل می‌توان شرایط مرزی را برای همه سناریوها تعیین کرد. برای ورق تاخوردۀ برای شش لبه شرایط مرزی اعمال می‌شود. در مطالعه‌ی حاضر شرایط مرزی FSsSsFSsSs در نظر گرفته شده است.

شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در لبه‌ها در امتداد محور  $x_k$ ها

$$u_k = v_k = w_k = \theta_{xk} = M_{y_k y_k} = 0 \tag{۱۰}$$

شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در لبه‌ها در امتداد محور  $y_k$ ها

$$N_{x_k y_k} = N_{y_k y_k} = Q_{y_k} = M_{x_k y_k} = M_{y_k y_k} = 0 \tag{۱۱}$$

در دو معادله فوق به شرایط مرزی ورق در لبه‌ها اشاره دارد. همچنین در مرز اتصال بین دو ورق به یکدیگر شرایط پیوستگی جابه‌جایی، پیچش، نیرو و ممان حاکم است. این شرایط به صورت رابطه‌ی (۱۲) بیان می‌شود.

$$\begin{aligned}
 u_1(L_1, y) &= -u_2(0, y)\cos\beta - w_2(0, y)\sin\beta, v_1(L_1, y) = v_2(0, y) \\
 w_1(L_1, y) &= u_2(0, y)\sin\beta - w_2(0, y)\cos\beta \\
 \theta_{x_1}(L_1, y) &= \theta_{x_2}(0, y), \theta_{y_1}(L_1, y) = \theta_{y_2}(0, y) \\
 -N_{x_1x_1}(L_1, y)\cos\beta + Q_{x_1}(L_1, y)\sin\beta &= N_{x_2x_2}(0, y), N_{x_1y_1}(L_1, y) = N_{x_2y_1}(0, y) \\
 -N_{x_1x_1}(L_1, y)\sin\beta - Q_{x_1}(L_1, y)\cos\beta &= Q_{x_2}(0, y) \\
 M_{x_1x_1}(L_1, y) &= M_{x_2x_2}(0, y), M_{x_1y_1}(L_1, y) = M_{x_2y_2}(0, y)
 \end{aligned} \tag{12}$$

در ادامه از حل ترکیبی لوی-تفاضل مربعات استفاده می‌شود. با استفاده از این روش، معادلات در دامنه و مرز به صورت معادله‌ی جبری زیر بدست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_{DD} & \tilde{k}_{DB} \\ \tilde{k}_{BD} & \tilde{k}_{BB} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \tilde{m}_{DD} & \tilde{m}_{DB} \\ \tilde{m}_{BD} & 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{13}$$

با تبدیل معادله فوق به فرم استاندارد مسئله مقدار ویژه و حل آن، مقدار فرکانس طبیعی حاصل می‌شود.

### ۳- صحنه سنجی

به منظور صحنه سنجی نتایج حاصل از حل ترکیبی لوی-تفاضل مربعات برای ورق تاخوردگی FGM، ورق تاخوردگی در نرم افزار شبیه‌سازی کامسول<sup>۸</sup> به روش المان محدود تحلیل گردید. تعداد المان‌ها در این تحلیل ۶۰۰۰۰ می‌باشد. مشخصات هندسی و مادی ورق مطابق با جدول ۱ می‌باشد. ویژگی‌ها در همه‌ی نتایج بر اساس این جدول می‌باشد مگر اینکه تغییر پارامتر ذکر گردد. شرایط مرزی در همه‌ی نتایج به صورت FSSsSsFSSsSs می‌باشد.

جدول ۱. مشخصات هندسی و الاستیک ورق تاخوردگی

$E_c$ (GPa)	$E_m$ (GPa)	$\rho_c$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho_m$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\nu$	$L_1$ (m)	$L_2$ (m)	$a$ (m)	$h$ (m)	$\beta$ (deg)
۳۸۰	۷۰	۳۸۰۰	۲۷۰۲	۰.۳	۰.۱	۰.۱	۰.۱	۰.۰۰۳	۱۲۰

چهار فرکانس طبیعی نخست عرضی ورق تاخوردگی مواد مدرج تابعی براساس مقادیر در نظر گرفته شده در جدول ۱ مطابق با جدول ۲ بدست آمد. مقایسه‌ی نتایج حاصل از روش تفاضل مربعات با نتایج حاصل از حل نرم‌افزاری بر اساس روش المان محدود، نشان می‌دهد که مدل‌سازی ریاضی و استفاده از روش عددی تفاضل مربعات بر این مسئله از دقت قابل قبولی برخوردار است. اما اختلافات می‌تواند ناشی از این باشد که هم روش تفاضل مربعات و هم روش المان محدود، هر دو جزو روش‌های عددی هستند.

جدول ۲. مقایسه‌ی نتایج حاصل از روش تفاضل مربعات و المان محدود برای زاویه  $\beta=180$

فرکانس (۱و۱) Hz	فرکانس (۱و۲) Hz	فرکانس (۱و۳) Hz	فرکانس (۱و۴) Hz
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

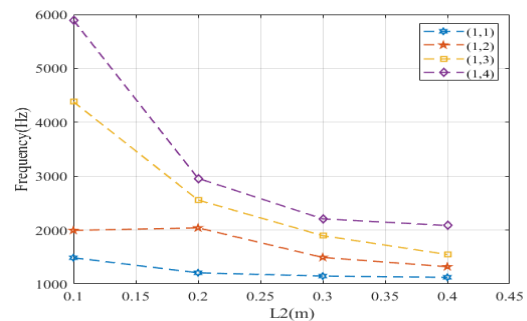
<sup>8</sup> Comsol

المان محدود	۱۳۶۴.۱	۱۶۲۵.۷	۳۸۳۲.۱	۵۸۵۳.۹
تفاضل مربعات	۱۱۸۸.۵	۱۷۴۲.۸	۳۴۶۱.۱	۵۷۳۲.۶
درصد خطا	۱۲.۸	۷	۹.۶	۲

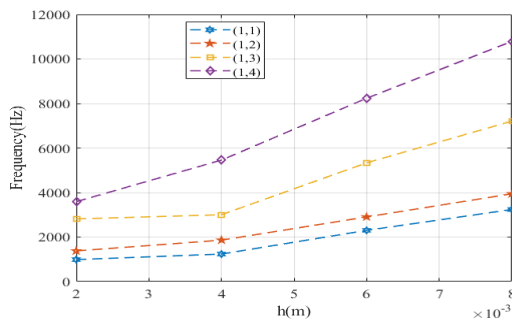
#### ۴- نتایج

تغییر پارامترهای هندسی ورق تاخوردگی از جنس FGM می‌تواند در فرکانس‌های طبیعی آن اثر گذار باشد. برای بررسی این موضوع هر بار با تغییر یک پارامتر و ثابت ماندن بقیه‌ی پارامترها مطابق با جدول ۱، نتایج بدست می‌آید و نمودار فرکانس طبیعی برحسب تغییرات پارامتر مورد نظر در چهار مود نخست عرضی ورق تاخوردگی مورد نظر رسم می‌گردد.

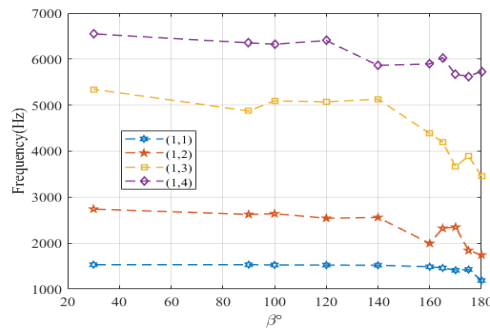
الف



ب



ج



شکل ۲. الف) نمودار تغییرات فرکانس برحسب تغییرات  $L_2$  (ب) نمودار تغییرات فرکانس برحسب تغییرات ضخامت ورق (h)

ج) نمودار تغییرات فرکانس برحسب زاویه تاخوردگی ( $\beta$ )

همانطور که در نمودار شکل (۲. الف) نشان داده شده است با افزایش طول ورق، فرکانس طبیعی کاهش پیدا می‌کند. همچنین مطابق نمودار شکل (۲. ب)، افزایش ضخامت باعث افزایش فرکانس طبیعی می‌شود. مطابق نمودار شکل (۲. ج)، فرکانس‌های طبیعی برحسب زاویه‌ی تاخوردگی رسم گردیده است، مشاهده می‌شود که کاهش زاویه‌ی تاخوردگی به صورت کلی ابتدا باعث افزایش فرکانس طبیعی شده و سپس فرکانس طبیعی تقریباً ثابت می‌ماند.

## ۵- نتیجه‌گیری

ارتعاشات آزاد ورق تاخوردگی مواد مدرج تابعی مطابق با آنچه بیان شد بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول و به روش لوی-تفاضل مربعات تحلیل شد. نتایج به صورت زیر است:

۱. نتایج حاصل از روش حل لوی-تفاضل مربعات با نتایج حاصل از نرم افزار کامسول تطابق قابل قبولی دارد.
۲. با افزایش طول ورق، فرکانس طبیعی ورق تاخوردگی کاهش پیدا می‌کند.
۳. با افزایش ضخامت ورق، فرکانس طبیعی افزایش پیدا می‌کند.
۴. با کاهش زاویه‌ی تاخوردگی به صورت کلی ابتدا فرکانس طبیعی افزایش و سپس تقریباً ثابت می‌ماند.

## مراجع

1. M. Koizumi, concept of FGM, Ceram. Trans., 34, 1993, 3–10.
2. hen HS, Xiang Y, Lin F. Nonlinear vibration of functionally graded graphene-reinforced composite laminated plates in thermal environments. *Comput Method Appl M* 2017; 319: 175-193
3. Fares ME, Elmarghany MK, Atta D. An efficient and simple refined theory for bending and vibration of functionally graded plates. *Compos Struct* 2009;91(3):296–305.
4. Roque CMC, Ferreira AJM, Reddy JN. Analysis of Mindlin micro plates with a modified couple stress theory and a meshless method. *Appl Math Model* 2013;37(7):4626–4633
5. Demirhan PA, Taskin V. Bending and free vibration analysis of Levy-type porous functionally graded plate using state space approach. *Compos B Eng* 2019; 160:661–676.
6. Baferani AH, Saidi AR, Ehteshami H. Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation. *Compos Struct* 2011;93(7):1842–1853.
7. Hosseini-Hashemi S, Fadaee M, Atashipour SR. A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates. *Int J Mech Sci* 2011;53(1):11–22.
8. Pham, Q. H., Tran, V. K., Tran, T. T., & Zenkour, A. M. (2023). Nonlocal higher-order finite element modeling for vibration analysis of viscoelastic orthotropic nanoplates resting on variable viscoelastic foundation. *Composite Structures*, 318, 117067.
9. Pham, Q. H., Tran, V. K., & Nguyen, P. C. (2024). Dynamic response of magneto-electro-elastic composite plates lying on visco-Pasternak medium subjected to blast load. *Composite Structures*, 337, 118054.
10. Tran, T. V., Tran, T. D., Hoa Pham, Q., Nguyen-Thoi, T., & Tran, V. K. (2020). An ES-MITC3 Finite Element Method Based on Higher-Order Shear Deformation Theory for Static and Free Vibration Analyses of FG Porous Plates Reinforced by GPLs. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020(1), 7520209.
11. Pham, Q. H., Tran, V. K., & Nguyen, P. C. (2024). Exact solution for thermal vibration of multi-directional functionally graded porous plates submerged in fluid medium. *Defence Technology*, 35, 77-99.
12. Pham, Q. H., Nhan, H. T., Tran, V. K., & Zenkour, A. M. (2023). Hygro-thermo-mechanical vibration analysis of functionally graded porous curved nanobeams resting on elastic foundations. *Waves in Random and Complex Media*, 1-32.
13. Thakur, B. R., Verma, S., Singh, B. N., & Maiti, D. K. (2021). Dynamic analysis of flat and folded laminated composite plates under hygrothermal environment using a nonpolynomial shear deformation theory. *Composite Structures*, 274, 114327.
14. S.Y. Lee, S.C. Wooh, S.S. Yhim, Dynamic behavior of folded composite plates analyzed by the third order plate theory, *Int. J. Solids Struct.* 41 (2004) 1879-1892.