حل دقیق ارتعاشات آزاد محوری نانومیله‌های دوفازی

رضا ناظم‌نژاد[آ]*، عرفان واحدیان[ب]، شاهرخ حسینی هاشمی[ب]، بیژن محمدی[ب]

[آ] ایران، دامغان، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه دامغان، کدپستی، دانشیار.

[ب] ایران، تهران، نارمک، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده مهندسی مکانیک، ۱۳۱۱۴-۱۶۸۴۶، دانشجوی دکتری.

[ب] ایران، تهران، نارمک، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده مهندسی مکانیک، ۱۳۱۱۴-۱۶۸۴۶، استاد.

[ب] ایران، تهران، نارمک، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده مهندسی مکانیک، ۱۳۱۱۴-۱۶۸۴۶، استاد.

*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: *rnazemnezhad@du.ac.ir*

چکیده

یکی از رفتارهای مهم سازه‌ها، رفتار ارتعاشاتی آنها می‌باشد. در بین سازه‌های مختلف و رفتارهای مختلف ارتعاشاتی، میله‌ها که سیستمی یک بعدی به حساب می‌آیند و رفتار ارتعاشات محوری آنها، از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشند. از طرف دیگر، تفاوت رفتار سازه‌ها در مقیاس نانو با مقیاس ماکرو سبب می‌شود توجه پژوهشگران در حوزه نانو بیشتر باشد. به همین دلیل، در این مقاله هدف بررسی ارتعاشات آزاد محوری نانومیله‌ها می‌باشد. نانومیله‌ها بصورت تئوری ساده مدل شده و از تئوری الاستیسیته دوفازی برای بررسی تاثیر مقیاس استفاده شده است. در این مقاله، سعی شده است با استفاده از یک روش جدید، معادله حرکت در فضای الاستیسیته دوبعدی ارایه گردد. سپس معادله حرکت بصورت دقیق و تحلیلی حل شده است و فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها استخراج شده‌اند. در این مقاله، اثرات طول، نوع شرط مرزی و مقدار پارامتر دوفازی بر فرکانس‌های طبیعی بررسی شده است. برای بررسی صحت و درستی معادلات و نتایج، مقایسه‌ای بین دستاورهای این پژوهش و پژوهش‌های پیشین صورت گرفته است. حاصل این مقایسه، صحت و دقت بسیار بالای روش حل و معادلات بدست آمده را نشان می‌دهد. هم‌چنین سعی شده است نتایج جدیدی که پیشتر ارایه نشده است برای استفاده محققان ارایه گردد.

کلمات کلیدی: ارتعاشات محوری؛ تئوری دوفازی؛ نانومیله؛ فرکانس طبیعی.

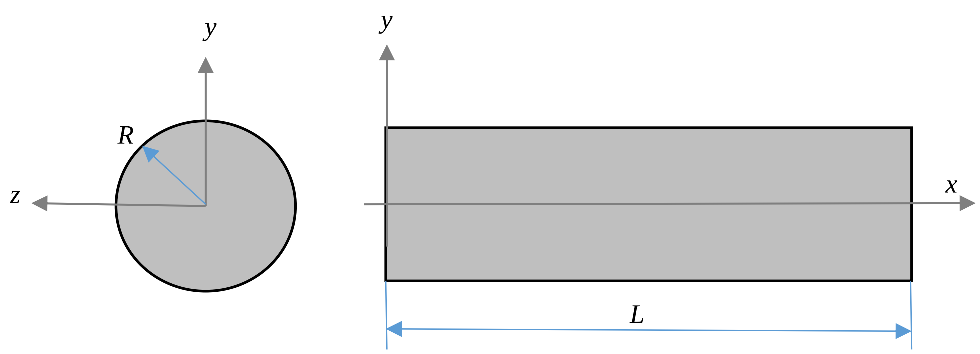
۱- مقدمه

تفاوت رفتار نانوسازه‌ها با سازه‌های در مقیاس ماکرو، سبب شده است پژوهشگران توجه ویژه‌ای به بررسی رفتار نانوسازه‌ها داشته باشند. بدین منظور، تئوری‌های مختلفی مانند تئوری الاستیسیته سطح، تئوری الاستیسیته غیرمحلی، تئوری گرادیان کرنش، ئ تئوری الاستیسیته دوفازی ارایه شده است.

مقایسه نتایج تجربی با نتایج حاصل از پژوهش‌های تئوری نشان داده است که نتایج تئوری الاستیسیته دوفازی تطابق بهتری با نتایج حاصل از پژوهش‌های تجربی دارد. در این راستا، فرناندز و زارئا [۱] ارتعاشات عرضی نانوتیرهای مدل شده با استفاده از تئوری اویلر-برنولی را با استفاده از تئوری الاستیسیته دوفازی بررسی نمودند. در پژوهش دیگری، بارتا و همکاران [۲] رفتار ارتعاشات پیچشی نانومیله‌ها را با استفاده از تئوری الاستیسیته دوفازی بررسی نمودند. آپوزو و همکاران [۳] نیز رفتار کوپل محوری و پیچشی را با استفاده از این تئوری بررسی نمودند. رفتار ارتعاشات عرضی نانوتیرها ویسکوالاستیک نیز توسط حسینی-هاشمی و همکاران [۴] بررسی شده است. در ادامه، فاخر و حسینی-هاشمی [۵] رفتار ارتعاشات آزاد غیرخطی عرضی نانوتیرها را با استفاده از این تئوری و روابط گالرکین بررسی نمودند. واکارو و همکاران [۶] در پژوهش دیگری رفتار ارتعاشات آزاد عرضی نانوتیرهای انحنادار مدل شده بر اساس تئوری تیر تیموشنکو را بررسی نمودند. در پژوهش مشابه دیگری، فاخر و حسینی-هاشمی [۷] رفتار ارتعاشات آزاد عرضی نانوتیرهای بدون انحنای مدل شده بر اساس تئوری تیر تیموشنکو را مورد مطالعه قرار دادند. گونای [۸] با استفاده از تئوری الاستیسیته دوفازی رفتار ارتعاشات آزاد نانوتیرهای جدار نازک را مورد مطالعه قرار داده است. رفتار ارتعاشات آزاد محوری نانومیله‌های مدل شده بر اساس تئوری رایلی با استفاده از تئوری الاستیسیته دوفازی بررسی شده است [۹]. حاجی صادقیان و همکاران [۱۰] نیز رفتار ارتعاشاتی نانومیله‌هایی که حول محور مرکزی خود دوران دارند را با استفاده از تئوری الاستیسیته دوفازی بررسی نمودند. و نهایتا ناظم‌نژاد و اشرفیان [۱۱] رفتار ارتعاشات آزاد طولی نانومیله‌های مدل شده با استفاده از تئوری ساده را به کمک روش حل عددی مربعات دیفرانسیل هارمونیک مورد بررسی قرار دادند. در تمامی این پژوهش‌ها، معادله حرکت و شرایط مرزی بر اساس رابطه دیفرانسیلی‌ای که از روی رابطه انتگرالی تئوری غیرمحلی بدست آمده است استخراج شده‌اند. اما در این پژوهش، هدف تبدیل معادله حرکت محلی به معادله حرکت دوفازی با یک روش ساده‌تر می‌باشد که قابلیت استفاده برای بسیاری از مسئله‌های ارتعاشاتی می‌باشد. به همین منظور، رفتار ارتعاشات آزاد محوری نانومیله‌های مدل شده با استفاده از تئوری ساده بر اساس تئوری دوفازی مطالعه خواهد شد. حل معادله حرکت بصورت تحلیلی انجام خواهد گرفت و فرکانس‌های طبیعی و شکل مود به ازای شرایط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد ارایه خواهد شد.

۲- مدلسازی مسئله

نانومیله‌ای به طول L $(0 \le x \le L)$ و شعاع R را مطابق شکل ۱ در نظر بگیرید.



شکل ۱. شماتیک نانومیله نازک

معادله حرکت و شرایط مرزی یک نانومیله مدل شده با استفاده از تئوری ساده در فضای الاستیسیته محلی بصورت زیر بیان می شود [۱۱]:

$$\frac{\partial N(x)}{\partial x} - \rho A\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0 \quad (۱)$$

$$(N(x))\delta u\Big|_0^L = 0 \quad (۲)$$

که $N(x) = \int \sigma\, dA$ می‌باشد.

تئوری الاستیسیته دو فازی محلی-غیرمحلی بصورت روابط زیر بیان می‌شود:

$$t(x) = \kappa\bar{C}:\varepsilon(x) + (1-\kappa)\int_{\bar{V}} \beta(x,\bar{x},\kappa)\,\bar{C}:\varepsilon(\bar{x})d\bar{V} \quad (۳)$$

$$\beta(x,\bar{x},\kappa) = \frac{1}{2\mu}e^{-\frac{|x-\bar{x}|}{\mu}} \quad (۴)$$

برای استفاده از رابطه (۳) که یک رابطه انتگرالی است و اکثر مقالات در این حوزه از این روابط استفاده می‌کنند روابط معادلی بصورت زیر برای معادله حرکت و شرایط مرزی پیشنهاد شده است:

$$G(x) = Y(x) + C\int_a^b e^{\mu|x-\bar{x}|}\,Y(\bar{x})d\bar{x} \quad (۵)$$

$$\ddot{Y}(x) + \mu(2\mathrm{C}-\mu)Y(x) = \ddot{G}(x) - \mu^2 G(x) \quad (۶)$$

$$\dot{Y}(a) + \mu Y(a) = \dot{G}(a) + \mu G(a) \quad (۷)$$

$$\dot{Y}(b) - \mu Y(b) = \dot{G}(b) - \mu G(b) \quad (۸)$$

استفاده از رابطه (۶) برای معادلات پیچیده بسیار مشکل است. به همین دلیل، در این مقاله، از مفهوم تئوری الاستیسیته دوفازی به شیوه دیگری استفاده می‌شود. طبق تئوری الاستیسیته دوفازی، تنش در یک نقطه، ترکیبی از تنش‌های محلی و غیرمحلی است که بصورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\sigma^{TP} = \kappa_1 * \sigma^l + \kappa_2 * \sigma^{Nl} \quad (۹)$$

در رابطه (۹)، σ^{TP}، σ^l، و σ^{Nl} به ترتیب تنش دوفازی، تنش محلی و تنش غیرمحلی بوده و κ_1 و κ_2 به ترتیب نشان دهنده سهم هر یک از تنش‌های محلی و غیرمحلی می‌باشند بطوریکه رابطه $\kappa_1 + \kappa_2 = 1$ برقرار می‌باشد. اگر دو طرف رابطه (۹) در المان مساحت ضرب شود و سپس انتگرال گرفته شود منتجه نیرو (N) بدست می‌آید:

$$N^{TP} = \kappa_1 * N^l + \kappa_2 * N^{Nl} \quad (۱۰)$$

علاوه بر توضیحات فوق، اشاره به این رابطه در فضای الاستیسیته غیرمحلی نیز لازم است. ارتباط بین منتجه تنش در فضای محلی و غیرمحلی بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\Gamma * N^{Nl} = N^l \quad (۱۱)$$

که $\Gamma = (1-\mu^2\nabla^2)$ بوده و برای مسایل یک بعدی، $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ می‌باشد.

بر اساس توضیحات داده شده، اگر معادله حرکت و شرایط مرزی یک نانومیله که بر اساس تئوری ساده مدل شده است را بر اساس منتجه‌های تنش دوفازی بصورت زیر در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\frac{\partial N^{TP}(x)}{\partial x} - \rho A\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0 \quad (۱۲)$$

$$(N^{TP}(x))\delta u\Big|_0^L = 0 \quad (۱۳)$$

همان‌طور که از رابطه‌های (۱۲) و (۱۳) مشخص است شکل کلی معادله حرکت و شرایط مرزی نانومیله در فضای الاستیسیته دوفازی باید با شکل کلی معادله حرکت و شرایط مرزی آن در فضای الاستیسیته محلی یکی باشد. تنها نکته‌ای که باید به آن توجه شود این است که اگر مرتبه مشتق در معادله حرکت دوفازی از تعداد شرایط مرزی بیشتر باشد باید برای جبران این کسری، از روابط (۷) و (۸) استفاده نمود!

اکنون با جایگذاری رابطه (۱۰) در رابطه (۱۲) عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\kappa_1 * N^l + \kappa_2 * N^{Nl}) - \rho A\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0 \tag{۱۴}$$

اگر عبارت Γ در رابطه (۱۴) ضرب شود رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\kappa_1 * \Gamma * N^l + \kappa_2 * \Gamma * N^{Nl}) - \Gamma * \rho A\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0 \tag{۱۵}$$

با استفاده از تعریف داده شده در رابطه (۱۱)، رابطه (۱۵) بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\kappa_1 * \Gamma * N^l + \kappa_2 * N^l) - \Gamma * \rho A\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0 \tag{۱۶}$$

اکنون با استفاده از تعاریف $\Gamma = (1 - \mu^2\nabla^2)$ و $\kappa_1 + \kappa_2 = 1$، رابطه (۱۶) بصورت زیر بیان می‌شود:

$$-\mu^2 * \kappa_1 * \frac{\partial^3 N^l}{\partial x^3} + \frac{\partial N^l}{\partial x} - \rho A\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + \mu^2 \rho A\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}\right) = 0 \tag{۱۷}$$

شرایط مرزی کلی نیز با در نظر گرفتن تعریف رابطه (۱۱) بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\left(\kappa_1 * N^l + \kappa_2 * \frac{N^l}{(1 - \mu^2\nabla^2)}\right)\delta u\Big|_0^L = 0 \tag{۱۸}$$

برای بیان روابط (۱۷) و (۱۸) بر حسب مولفه جابجایی، منتجه تنش محلی بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} N(x) = \int \sigma\, dA \\ \sigma = E\varepsilon \\ \varepsilon = \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad N(x) = EA\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} \tag{۱۹}$$

با جایگذاری رابطه (۱۹) در روابط (۱۷) و (۱۸)، رابطه‌های زیر برای معادله حرکت و شرایط مرزی نانومیله نازک در فضای الاستیسیته دوفازی بدست می‌آید:

$$\frac{\partial^4 \mathrm{u}}{\partial x^4} - \frac{1}{\mu^2\kappa_1}\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2} + \frac{\rho}{\mu^2\kappa_1 E}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) - \frac{\rho}{\kappa_1 * E}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}\right) = 0 \tag{۲۰}$$

$$\left(\kappa_1 + \kappa_2 * \frac{1}{(1 - \mu^2\nabla^2)}\right)\left(EA\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right)\delta u\Big|_0^L = 0 \tag{۲۱}$$

معادلات (۲۰) و (۲۱) دقیقا مشابه معادلاتی است که در مرجع [۱۱] ارایه شده است. همان‌طور که پیشتر بیان شد از آنجا که مرتبه مشتق در رابطه (۲۰)، چهار بوده و تعداد معادلات بدست آمده از رابطه (۲۱)، دو می‌باشد بنابراین برای جبران دو معادله دیگر، از رابطه‌های (۷) و (۸) باید استفاده شود!

برای بیان روابط نوع شرط مرزی خاص، روابط دو نوع شرط مرزی گیردار و آزاد بصورت زیر ارایه شده‌اند:

- گیردار

$$u(x) = 0 \tag{۲۲}$$

- آزاد

$$\begin{aligned} &\left(\kappa_1 + \kappa_2 * \frac{1}{(1 - \mu^2\nabla^2)}\right)\left(EA\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right) = 0 \Rightarrow (\kappa_1(1 - \mu^2\nabla^2) + \kappa_2)\left(EA\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right) \\ &= ((\kappa_1 + \kappa_2) - \kappa_1\mu^2\nabla^2)\left(EA\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right) = (1 - \kappa_1\mu^2\nabla^2)\left(EA\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right) \\ &= EA\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} - \kappa_1\mu^2 EA\frac{\partial^3 \mathrm{u}}{\partial x^3} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} - \kappa_1\mu^2\frac{\partial^3 \mathrm{u}}{\partial x^3} = 0 \end{aligned} \tag{۲۳}$$

همان‌طور که از مسیر طی شده برای استخراج معادله حرکت و شرایط مرزی بر اساس روش پیشنهادی این مقاله مشخص است این مسیر بسیار آسان‌تر و سریع‌تر از روشی است که پیشتر اکثر مقالات در قالب روابط (۵)-(۸) استفاده می‌کردند.

۳- حل معادله حرکت و تحلیل ارتعاشات آزاد

برای تحلیل ارتعاشات آزاد سیستم، ارتعاشاتی بصورت هارمونیک در نظر گرفته شده است:

$$u(x) = \phi(x)e^{i\omega t} \tag{۲۴}$$

که ω، t، و $\phi(x)$ به ترتیب فرکانس طبیعی سیستم بر حسب رادیان بر ثانیه، زمان بر حسب ثانیه و شکل مود خطی سیستم می‌باشند.

با جایگذاری رابطه (۲۴) در رابطه‌های (۲۰)-(۲۳)، روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\frac{d^4\phi}{dx^4}+\left(\frac{\mu^2\rho\omega^2-E}{\mu^2\kappa_1 E}\right)\frac{d^2\phi}{dx^2}-\left(\frac{\rho\omega^2}{\mu^2\kappa_1 E}\right)\phi=0 \quad (۲۵)$$

$$\phi(x)=0 \quad (۲۶)$$

$$\frac{d\phi}{dx}-\kappa_1\mu^2\frac{d^3\phi}{dx^3}=0 \quad (۲۷)$$

برای حل معادله (۲۵)، تعریف $\phi=e^{\lambda x}$ در آن جایگذاری می‌شود:

$$\lambda^4+\left(\frac{\rho\omega^2}{\kappa_1 * E}-\frac{1}{\mu^2\kappa_1}\right)\lambda^2-\left(\frac{\rho\omega^2}{\mu^2\kappa_1 E}\right)=0 \quad (۲۵)$$

جواب معادله فوق عبارت است از:

$$\phi(x)=C_1\cosh\,(s_1x)+C_2\sinh\,(s_1x)+C_3\cos\,(s_2x)\;+C_4\sin\,(s_2x) \quad (۲۶)$$

بطوریکه

$$s_1=\sqrt{\frac{EA-\rho A\mu^2\omega^2+\sqrt{(EA-\rho A\mu^2\omega^2)^2+4\rho\kappa_1 EA^2\mu^2\omega^2}}{2EA\kappa_1\mu^2}} \quad (۲۷)$$

$$s_2=\sqrt{\frac{\sqrt{(EA-\rho A\mu^2\omega^2)^2+4\rho\kappa_1 EA^2\mu^2\omega^2}-(EA-\rho A\mu^2\omega^2)}{2EA\kappa_1\mu^2}} \quad (۲۸)$$

با فرض اینکه نانومیله دارای شرایط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد است با اعمال شرایط مرزی مربوطه، و برابر صفر قرار دادن ماتریس ضرایب، معادله مشخصه شرایط مرزی فوق بدست می‌آیند که بدلیل طولانی بودن عبارت حاصله، از آوردن آن اجتناب شده است.

۴- نتایج

۴-۱ اعتبارسنجی روابط

در این بخش، روابط ارایه شده از طریق مقایسه نتایج حاصل از روابط حاضر و روابطی که در مراجع قبلی ارایه شده است اعتبارسنجی می‌گردند. بدین منظور، در جدول (۱) سه فرکانس اول نانومیله ساده با شرایط مرزی گیردار-گیردار برای دو حالت محلی و دوفازی با نتایج ارایه شده در مراجع [۱۱, ۱۲] مقایسه شده است. خواص مکانیکی و هندسی نانومیله بر اساس داده‌های مرجع [۱۱] انتخاب شده‌اند. قابل ذکر است در مرجع [۱۲]، فرم بسته‌ای برای فرکانس ارایه شده است که با قرار دادن داده‌های مرجع [۱۱]، نتایج استخراج شده است.

جدول ۱. سه فرکانس اول محلی و دوفازی نانومیله نازک مدل شده بر اساس تئوری ساده

شماره فرکانس	فرکانس محلی (TPa)		فرکانس دوفازی (TPa) $(\mu=1\,nm, \kappa_1=0.5)$	
	پژوهش حاضر	مرجع [۱۲]	پژوهش حاضر	مرجع [۱۱]
۱	۱/۸۸۴۹۶	۱/۸۸۴۹۶	۱/۴۵۶۲۵	۱/۵۳۷۲۶
۲	۵/۶۵۴۸۷	۵/۶۵۴۸۷	۲/۷۷۶۳۰	۲/۹۳۲۶۲
۳	۹/۴۲۴۷۸	۹/۴۲۴۷۸	۴/۰۷۹۷۵	۴/۲۱۵۱۷

همان‌طور که جدول (۱) نشان می‌دهد فرکانس‌های محلی ارایه شده در پژوهش حاضر و مرجع [۱۲] دقیقا مشابه می‌باشند. دلیل این امر این است که هر دو روش، فرکانس‌های سیستم را بصورت تحلیلی استخراج نمودند به بیان دیگر، روش حل هر دو مرجع، یکسان است. اما فرکانس‌های دوفازی ارایه شده توسط پژوهش حاضر با نتایج پژوهش [۱۱] مقداری اختلاف دارند که علت آن، تفاوت نوع روش حل می‌باشند. پژوهش حاضر از روش حل تحلیلی یا دقیق استفاده نموده است اما پژوهش [۱۱] از روش عددی مربعات دیفرانسیل هارمونیک استفاده کرده است.

۴-۲ ارایه نتایج جدید

در این بخش، فرکانس‌های نانومیله به ازای مقادیر مختلف طول، شماره فرکانس و پارامتر دوفازی ارایه می‌گردد. فرض شده است نانومیله از جنس آلومینیوم با خواص مکانیکی و هندسی داده شده در جدول (۲) باشد.

جدول ۲. خواص مکانیکی و هندسی نانومیله نازک از جنس آلومینیوم [۱۳]

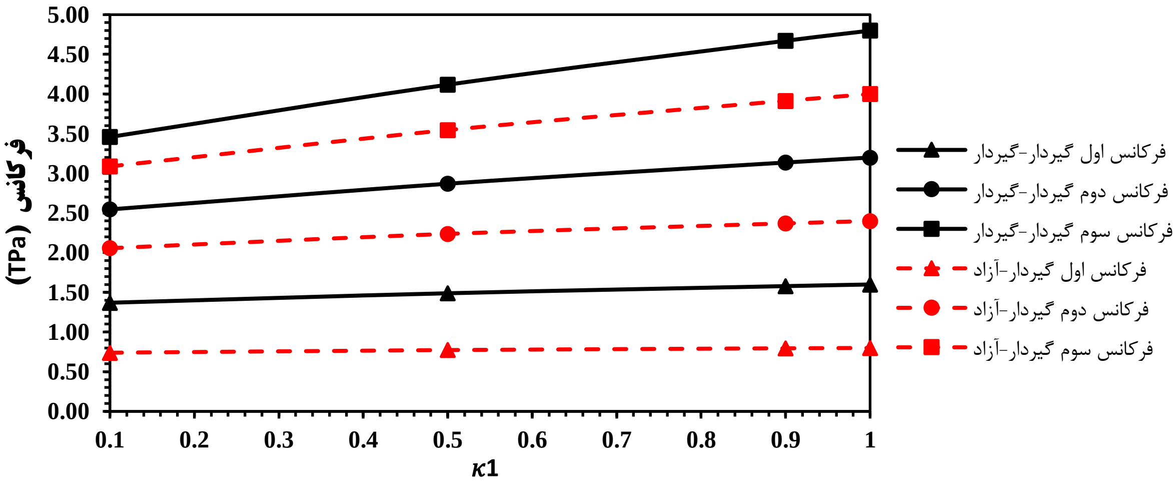
خاصیت مکانیکی و هندسی	$E\,(GPa)$	$\rho\,\left(\frac{kg}{m^3}\right)$	$R\,(nm)$	$\mu\,(nm)$
مقدار	۷۰	۲۷۰۰	۰/۵	۱

در جدول (۳) فرکانس اول نانومیله نازک به ازای چهار مقدار برای پارامتر دوفازی، دو مقدار برای طول، و دو شرط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد ارایه شده است. همان‌طور که از جدول (۳) مشخص است با افزایش پارامتر دوفازی، مقدار فرکانس افزایش می‌یابد. علت این امر این است که با افزایش پارامتر دوفازی، سهم قسمت غیرمحلی کاهش می‌یابد. هم‌چنین جدول (۳) نشان می‌دهد که با افزایش پارامتر دوفازی، میزان تغییر در مقدار فرکانس، با درصد کمتری افزایش می‌یابد. این تغییرات برای شرط مرزی گیردار-گیردار بیشتر از شرط مرزی گیردار-آزاد می‌باشد.

جدول ۳. فرکانس (TPa) اول نانومیله نازک به ازای مقادیر مختلف پارامتر κ_1، طول و شرایط مرزی مختلف

طول (nm)	گیردار-گیردار				گیردار-آزاد			
	۵		۱۰		۵		۱۰	
κ_1	فرکانس	درصد افزایش	فرکانس	درصد افزایش	فرکانس	درصد افزایش	فرکانس	درصد افزایش
۰/۱	۲/۳۴۴۶	–	۱/۳۶۹۴	–	۱/۳۴۵۳	–	۰/۷۳۹۵	–
۰/۵	۲/۷۷۵۲	۱۸/۳۷	۱/۴۸۸۹	۸/۷۲	۱/۴۸۵۲	۱۰/۴۰	۰/۷۷۳۰	۴/۵۳
۰/۹	۳/۱۱۹۸	۱۲/۴۲	۱/۵۷۸۹	۶/۰۴	۱/۵۷۸۸	۶/۳۰	۰/۷۹۴۹	۲/۸۳
۱/۰	۳/۱۹۹۲	۲/۵۴	۱/۵۹۹۶	۱/۳۱	۱/۵۹۹۶	۰/۶۲	۰/۷۹۹۸	۰/۶۲

در ادامه، تغییرات سه فرکانس اول نانومیله نازک به ازای مقادیر مختلف پارامتر دوفازی در شکل (۲) نشان داده شده است. همان طور که شکل (۲) نشان می‌دهد وابستگی فرکانس‌های طبیعی به پارامتر دوفازی، با افزایش پارامتر دوفازی افزایش می‌یابد. این وابستگی در شماره فرکانس‌های بالاتر و به ازای شرط مرزی گیردار-گیردار بیشتر از شرط مرزی گیردار-آزاد می‌باشد.



شکل ۲. سه فرکانس اول نانومیله نازک به ازای مقادیر مختلف پارامتر κ_1 برای دو شرط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، رفتار ارتعاشات آزاد محوری نانومیله نازک با استفاده از تئوری الاستیسیته دوفازی مورد بررسی قرار گرفت. آنچه به عنوان نوآوری این مقاله باید بیان نمود این است که اولا، معادله حرکت با استفاده از روش تحلیلی و دقیق حل شده است. ثانیا، تبدیل معادله حرکت و شرایط مرزی محلی به دوفازی، توسط روش جدیدی که برگرفته از مفاهیم مورد استفاده در تئوری‌های الاستیسیته محلی و غیرمحلی می‌باشد انجام گرفته است. نتیجه کلی این است که استفاده از دو نوآوری بیان شده، سبب شده است دقیقا همان روابطی که پیشتر برای معادله حرکت و شرایط مرزی رفتار ارتعاشات محوری نانومیله نازک ارایه شده بود بدست. علاوه بر این، سرعت تبدیل معادلات از فضای محلی به دوفازی و حجم عملیات ریاضی مورد نیاز بسیار کمتر بوده است. آنچه در این مقاله ارایه شده است می‌تواند الگویی مناسب برای دیگر مسایل در فضای الاستیسیته دوفازی باشد.

مراجع

1. J. Fernández-Sáez, R. Zaera, "Vibrations of Bernoulli-Euler beams using the two-phase nonlocal elasticity theory", *International Journal of Engineering Science* 119, 232-248 (2017).
2. R. Barretta, S. A. Faghidian, R. Luciano, C. Medaglia, and R. Penna, "Stress-driven two-phase integral elasticity for torsion of nano-beams", *Composites Part B: Engineering* 145, 62-69 (2018).
3. A. Apuzzo, R. Barretta, F. Fabbrocino, S. A. Faghidian, R. Luciano, and F. Marotti De Sciarra, "Axial and torsional free vibrations of elastic nano-beams by stress-driven two-phase elasticity", *Journal of Applied and Computational Mechanics* 5(2), 402-413 (2019).
4. S. Hosseini-Hashemi, S. Behdad, and M. Fakher, "Vibration analysis of two-phase local/nonlocal viscoelastic nanobeams with surface effects", *The European Physical Journal Plus* 135, 1-18 (2020).
5. M. Fakher, S. Hosseini-Hashemi, "Nonlinear vibration analysis of two-phase local/nonlocal nanobeams with size-dependent nonlinearity by using Galerkin method", *Journal of Vibration and Control* 27(3-4), 378-391 (2021).
6. M. S. Vaccaro, F. P. Pinnola, F. M. de Sciarra, M. Canadija, and R. Barretta, "Stress-driven two-phase integral elasticity for Timoshenko curved beams", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part N: Journal of Nanomaterials, Nanoengineering and Nanosystems* 235(1-2), 52-63 (2021).
7. M. Fakher, S. Hosseini-Hashemi, "Vibration of two-phase local/nonlocal Timoshenko nanobeams with an efficient shear-locking-free finite-element model and exact solution", *Engineering with Computers*, 1-15 (2022).
8. M. Gökhan Günay, "Free vibration analysis of thin-walled beams using two-phase local–nonlocal constitutive model", *Journal of Vibration and Acoustics* 145(3), 031009 (2023).
9. R. Nazemnezhad, R. Ashrafian, "Longitudinal Vibration of Nanobeams by Two-Phase Local/Nonlocal Elasticity, Rayleigh Theory, and Generalized Differential Quadrature Method", *Mechanics of Advanced Composite Structures* 10(2), 221-232 (2023).
10. F. Hajisadeghiyan, S. Hosseini-Hashemi, R. Nazemnezhad, and R. Ashrafian, "Effect of axial rotation on free transverse vibration analysis of two-phase nanobeams", *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 46(9), 545 (2024).

۱۱. ر. ناظم‌نژاد، ر. اشرفیان، 'ارتعاشات طولی نانو تیرها با استفاده از تئوری الاستیسیته محلی/ غیر محلی دو فازی'، نهمین کنگره انجمن علوم صوتی ایران، تهران، ۱۴۰۲.

12. S. S. Rao: 'Vibration of continuous systems'; 2019, John Wiley & Sons.

13. S. Ogata, J. Li, and S. Yip, "Ideal pure shear strength of aluminum and copper", *Science* 298(5594), 807-811 (2002).