بررسی تحلیلی ارتعاشات طولی نانومیله‌های نسبتا ضخیم با استفاده از تئوری الاستیسیته دوفازی

رضا ناظم‌نژاد

[۱] ایران، دامغان، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه دامغان، ۴۵۶۶۷-۳۶۷۱۶، دانشیار.

*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: *rnazemnezhad@du.ac.ir*

چکیده

هدف این مقاله بررسی ارتعاشات آزاد نانومیله‌های نسبتا ضخیم بر اساس تئوری الاستیسیته دوفازی می‌باشد. نانومیله نسبتا ضخیم با استفاده از تئوری رایلی مدل شده است. موضوع اصلی مورد بررسی در این مقاله، نحوه حل معادله حرکت ارتعاشات آزاد طولی نانومیله ها در فضای الاستیسیته دو فازی می‌باشد. از آنجا که تبدیل معادلات حرکت از فضای محلی به فضای محلی-غیرمحلی (دوفازی) سبب افزایش مرتبه مشتق در معادلات حرکت می‌شود. بنابراین تعداد شرایط مرزی مورد نیاز برای حل تحلیلی یا دقیق، در فضای الاستیسیته دوفازی بیشتر از فضای محلی می‌باشد. معمولا تئوری الاستیسیته دوفازی تعداد شرایط مرزی بیشتر را پیشنهاد می‌دهد و در کنار شرایط مرزی‌ای که از تئوری محلی بدست می‌آید تعداد شرایط مرزی کافی می‌باشد. اما با این وجود، در مقالاتی دیده شده است که شرایط مرزی محلی در حل معادلات حرکت مورد استفاده قرار نگرفته است و این سبب شده است پژوهشگران از روش‌های عددی برای حل معادله حرکت استفاده نمایند. مشکل دیگری که عدم استفاده از شرایط مرزی محلی ایجاد می‌کند عدم امکان ارایه حل برای شرایط مرزی مختلف صرفا با استفاده از شرایط مرزی حاصل از تئوری دوفازی است. موضوع مورد اشاره، در رابطه با رفتار ارتعاشات آزاد طولی نانومیله‌های نسبتا ضخیم نیز مشاهده شده است. بنابراین نویسنده سعی در تعیین تاثیر این عوامل روی رفتار ارتعاشات آزاد طولی نانومیله های نسبتا ضخیم دارد.

کلمات کلیدی: ارتعاشات طولی؛ نانومیله؛ فرکانس طبیعی؛ حل تحلیلی.

۱- مقدمه

با توجه به ویژگی‌های متفاوت سازه‌های نانومقیاس در مقایسه با سازه‌های ماکرومقیاس، لزوم شناخت دقیق رفتارهای مختلف آنها بسیار ضروری است. بر این اساس تئوری‌های مختلفی پیشنهاد شده است تا نتایج آنها با نتایج تجربی قرابت مناسب داشته باشند. در بین تئوری‌های پیشنهاد شده، تئوری الاستیسیته دوفازی، تطابق بسیار خوبی با نتایج تجربی نشان داده است. با استفاده از این تئوری،

پژوهش‌های مختلفی در زمینه بررسی رفتارهای مختلف سازه‌ها مخصوصا رفتار ارتعاشات پیچشی، محوری و عرضی انجام گرفته است. اخیرا بررسی رفتار ارتعاشات محوری مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. در این راستا، رفتار ارتعاشات محوری کوپل شده با رفتار ارتعاشات پیچشی بر اساس تئوری الاستیسته دوفازی بررسی شده است. شرایط مرزی در نظر گرفته شده عبارت است از شرایط مرزی گیردار-آزاد و گیردار-گیردار [۱]. در پژوهش دیگری، رفتار ارتعاشات محوری نانومیله‌های نسبتا ضخیم که بر اساس تئوری رایلی مدل شده‌اند بررسی شده است. در این پژوهش، شرایط مرزی کلاسیک برای حل معادله حرکت دوفازی مورد استفاده قرار نگرفته است [۲]. در پژوهش مشابه دیگری، ناظم‌نژاد و همکاران [۳] رفتار ارتعاشات محوری نانومیله‌های ضخیم که بر اساس تئوری بیشاپ مدل شده‌اند را با استفاده از تئوری الاستیسیته دوفازی بررسی نمودند. برای حل معادله حرکت، از روش عددی مربعات دیفرانسیل تعمیم‌یافته استفاده شده است. آنچه در بالا اشاره شده پژوهش‌هایی بوده است که منحصرا روی رفتار ارتعاشات محوری متمرکز بوده است. آنچه در این پژوهش‌ها اتفاق افتاده است عدم استفاده از شرایط مرزی کلاسیک برای حل معادلات حرکت است. این امر سبب می‌شود نتوان برای شرایط مرزی مختلف، نتایج متفاوتی ارایه نمود. لذا در این پژوهش هدف بررسی تاثیر در نظر گرفتن شرایط مرزی کلاسیک به همراه شرایط مرزی دوفازی در حل معادلات حرکت دوفازی است. به همین دلیل، ارتعاشات محوری نانومیله‌های نسبتا ضخیم مدنظر است. در این راستا، از تئوری رایلی برای مدلسازی نانومیله استفاده شده استو سپس معادلات حرکت محلی تبدیل به معادلات حرکت دوفازی شده است. نهایتا با استفاده از روش حل دقیق، معادله حرکت حل شده و فرکانس‌های طبیعی برای دو نوع شرط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد ارایه شده است. صحت و دقت روابط و نتایج نیز با انجام مقایسه با نتایج ارایه شده در مراجع اثبات شده است.

۲- ارائه مدل ریاضی مسئله

همان‌طور که در مرجع [۲] ارایه شده است معادله حرکت و شرایط مرزی یک نانومیله نسبتا ضخیم در فضای الاسیسیته محلی، بصورت روابط زیر بیان می‌گردد:

$$\frac{\partial N(x,t)}{\partial x}-\rho A\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)+\rho v^2 I_p\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}\right)=0 \tag{۱}$$

$$\left(N(x,t)+\rho v^2 I_p\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}\right)\right)\delta u\Big|_0^L=0 \tag{۲}$$

که N منتجه تنش، $\rho\ (kg/m^3)$ چگالی ، $A\ (m^2)$ مساحت سطح مقطع، v نسبت پواسون و $I_p=\int_A (y^2+z^2)dA$ ممان قطبی می باشد. منتجه تنش بصورت زیر بیان می‌شود:

$$N=\int \sigma_{xx}\,dA=EA\frac{\partial U}{\partial x} \tag{۳}$$

که E مدول الاستیسیته و U مولفه جابجایی در راستای طول میله می‌باشد.

بر اساس مفاهیم تئوری الاستیسیته دوفازی، معادله حرکت و شرایط مرزی باید بر حسب منتجه‌های تنش دوفازی ارایه گردد. بر این اساس، روابط (۱) و (۲) بصورت زیر بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial N^{TP}}{\partial x}-\rho A\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)+\rho v^2 I_p\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}\right)=0 \tag{۴}$$

$$\left(N^{TP}+\rho v^2 I_p\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}\right)\right)\delta u\Big|_0^L=0 \tag{۵}$$

اکنون باید منتجه تنش دوفازی را بر حسب مولفه‌های جابجایی تعیین نمود تا بتوان مسئله را تحلیل کرد. بدین منظور رابطه‌ای بصورت زیر پیشنهاد شده است:

$$t(x)=\zeta\bar{C}:\varepsilon(x)+(1-\zeta)\int_{\bar{V}}\frac{1}{2\kappa}e^{-\frac{|x-\bar{x}|}{\kappa}}\,\bar{C}:\varepsilon(\bar{x})d\bar{V} \tag{۶}$$

از آنجه که رابطه بالا بصورت انتگرالی می‌باشد و حل مسایل انتگرالی پیچیدگی‌های خاص خود را دارد روابط معادلی بصورت زیر پیشنهاد شده است:

$$G(x)=Y(x)+C\int_a^b e^{\mu|x-\bar{x}|}\,Y(\bar{x})d\bar{x} \tag{۷}$$

$$\ddot{Y}(x) + \mu(2C - \mu)Y(x) = \ddot{G}(x) - \mu^2 G(x) \tag{۸}$$

$$\dot{Y}(a) + \mu Y(a) = \dot{G}(a) + \mu G(a) \tag{۹}$$

$$\dot{Y}(b) - \mu Y(b) = \dot{G}(b) - \mu G(b) \tag{۱۰}$$

با استفاده از روابط فوق، منتجه تنش دوفازی بر حسب مولفه‌های جابجایی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$N^{TP} = -\rho \nu^2 I_p \kappa^2 \left(\frac{\partial^5 u(x,t)}{\partial x^3 \partial t^2}\right) + \rho A \kappa^2 \left(\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial t^2}\right) + EA\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) - \zeta EA\kappa^2 \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} \tag{۱۱}$$

با جایگذاری منتجه تنش دوفازی و انجام یکسری عملیات ریاضی، معادله حرکت نانومیله نسبتا ضخیم بر اساس تئوری الاستیسیته دوفازی و دو شرط مرزی اضافه، بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$-\mu^2 \zeta EA \frac{\partial^4 \mathrm{U}}{\partial x^4} + EA\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2} - \rho A\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) + \mu^2 \rho A\left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial t^2}\right) + \rho \nu^2 I_p\left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial t^2}\right) - \mu^2 \rho \nu^2 I_p\left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial t^2}\right) = 0 \tag{۱۲}$$

$$\begin{aligned} -EA\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{k}EA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{1}{k\xi}EA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{\xi}EA\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - \frac{k}{\xi}\rho A\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x}\right) + \frac{k^2}{\xi}\rho A\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2}\right) \\ + \frac{k}{\xi}\rho \nu^2 I_p\left(\frac{\partial^5 u}{\partial t^2 \partial x^3}\right) - \frac{k^2}{\xi}\rho \nu^2 I_p\left(\frac{\partial^6 u}{\partial t^2 \partial x^4}\right) + kEA\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) - k^2 EA\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right) \quad at \quad x = 0 \end{aligned} \tag{۱۳}$$

$$\begin{aligned} -EA\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - \frac{1}{k}EA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{k\xi}EA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{\xi}EA\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{k}{\xi}\rho A\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x}\right) + \frac{k^2}{\xi}\rho A\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2}\right) \\ + \frac{k}{\xi}\rho \nu^2 I_p\left(\frac{\partial^5 u}{\partial t^2 \partial x^3}\right) - \frac{k^2}{\xi}\rho \nu^2 I_p\left(\frac{\partial^6 u}{\partial t^2 \partial x^4}\right) - kEA\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) - k^2 EA\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right) \quad at \quad x = L \end{aligned} \tag{۱۴}$$

آنچه معادلات (۱۲)-(۱۴) نشان می‌دهد این است که معادله حرکت دوفازی یک نانومیله نسبتا ضخیم (معادله (۱۲))، معادله‌ای مرتبه چهار نسبت به مکان می‌باشد در حالیکه برای حل آن، دو شرط مرزی دوفازی (معادلات (۱۳) و (۱۴)) وجود دارد. آنچه در مرجع [۲] انجام گرفته است حل معادله حرکت (۱۲) فقط با استفاده از شرایط مرزی (۱۳) و (۱۴) و بصورت حل عددی با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل تعمیم‌یافته[1] بوده است. در مرجع فوق نتایج حل معادله فوق با نتایج ارایه شده در مرجع [۴] با شرایط مرزی گیردار-گیردار مقایسه شده است. اکنون سوالی که مطرح می‌باشد این است که اگر بخواهیم معادله (۱۲) را برای شرایط مرزی دیگر حل کنیم از چه معادلات شرایط مرزی‌ای باید استفاده نمود؟

برای پاسخ به سوال فوق باید ذکر شود که برای حل معادلات حرکت دوفازی، علاوه بر معادلات شرایط مرزی بدست آمده از تئوری الاستیسیته دوفازی، باید از معادلات شرایط مرزی بدست آمده از تئوری الاستیسیته محلی یا کلاسیک (معادلات (۵)) نیز استفاده نمود. بدین ترتیب، تعداد معادلات شرایط مرزی با مرتبه مشتق معادله حرکت برابر می‌شود و امکان حل معادله حرکت برای هر نوع شرط مرزی و به روش دقیق امکان‌پذیر می‌باشد.

۳- تحلیل ارتعاشات آزاد نانومیله نسبتا ضخیم

با توجه به توضیحات ارایه شده در بخش قبل، معادله حرکت دوفازی نانومیله نسبتا ضخیم و چهار شرط مرزی مورد نیاز که دوتای آن‌ها حاصل از تئوری الاستیسیته دوفازی و دوتای دیگر حاصل از تئوری الاستیسیته کلاسیک یا محلی می‌باشد بصورت زیر بیان می‌شود:

$$-\mu^2 \zeta EA \frac{\partial^4 \mathrm{U}}{\partial x^4} + EA\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2} - \rho A\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) + \mu^2 \rho A\left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial t^2}\right) + \rho \nu^2 I_p\left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial t^2}\right) - \mu^2 \rho \nu^2 I_p\left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial t^2}\right) = 0 \tag{۱۵}$$

[1] Generalized Differential Quadrature Method (GDQM)

$$-EA\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)+\frac{1}{k}EA\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)-\frac{1}{k\xi}EA\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{1}{\xi}EA\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)-\frac{k}{\xi}\rho A\left(\frac{\partial^3 U}{\partial t^2\partial x}\right)+\frac{k^2}{\xi}\rho A\left(\frac{\partial^4 U}{\partial t^2\partial x^2}\right)+\frac{k}{\xi}\rho\nu^2 I_p\left(\frac{\partial^5 U}{\partial t^2\partial x^3}\right)-\frac{k^2}{\xi}\rho\nu^2 I_p\left(\frac{\partial^6 U}{\partial t^2\partial x^4}\right)+kEA\left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right)-k^2EA\left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}\right)\quad at\quad x=0 \tag{۱۶}$$

$$-EA\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)-\frac{1}{k}EA\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{1}{k\xi}EA\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{1}{\xi}EA\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)+\frac{k}{\xi}\rho A\left(\frac{\partial^3 U}{\partial t^2\partial x}\right)+\frac{k^2}{\xi}\rho A\left(\frac{\partial^4 U}{\partial t^2\partial x^2}\right)+\frac{k}{\xi}\rho\nu^2 I_p\left(\frac{\partial^5 U}{\partial t^2\partial x^3}\right)-\frac{k^2}{\xi}\rho\nu^2 I_p\left(\frac{\partial^6 U}{\partial t^2\partial x^4}\right)-kEA\left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right)-k^2EA\left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}\right)\quad at\quad x=L \tag{۱۷}$$

$$U=0 \tag{۱۸}$$

$$\left(N^{TP}+\rho\nu^2 I_p\left(\frac{\partial^3 U}{\partial x\partial t^2}\right)\right)=0 \tag{۱۹}$$

در ادامه برای اینکه تفاوت نوع شرط مرزی در حل معادله حرکت مشخص شود دو نوع شرط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا فرض می‌شود جابجایی نانومیله بصورت هارمونیک انجام پذیرد:

$$U(x,t)=\bar{U}(x)e^{i\omega t} \tag{۲۰}$$

با جایگذاری رابطه (۲۰) در رابطه (۱۵)، معادله زیر بدست می‌آید:

$$\left(\frac{d^4\bar{U}}{dx^4}\right)+\alpha_1\left(\frac{d^2\bar{U}}{dx^2}\right)+\alpha_2(\bar{U})=0 \tag{۲۱}$$

که

$$\alpha_1=-\left(\frac{EA+\left(k^2\rho\nu^2 I_p-k^2\rho A-\rho\nu^2 I_p\right)\omega^2}{k^2\zeta EA}\right);\qquad \alpha_2=-\left(\frac{\rho A\omega^2}{k^2\zeta EA}\right);$$

می‌باشد.

با فرض $\bar{U}(x)=Ce^{px}$، حل معادله (۲۱) بصورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$\bar{U}(x)=C_1e^{s_1x}+C_2e^{-s_1x}+C_3e^{is_2x}+C_4e^{-is_2x} \tag{۲۲}$$

که در آن

$$p_1=-p_2=s_1=\sqrt{\frac{-\alpha_1+\sqrt{{\alpha_1}^2-4\alpha_2}}{2}} \tag{۲۳}$$

$$p_3=-p_4=is_2=i\sqrt{\frac{\alpha_1+\sqrt{{\alpha_1}^2-4\alpha_2}}{2}} \tag{۲۴}$$

می‌باشد.

۳-۱ نانومیله نسبتا ضخیم با شرایط مرزی گیردار-گیردار

با در نظر گرفتن رابطه (۲۰)، برای نانومیله نسبتا ضخیم با شرایط مرزی گیردار-گیردار روابط شرایط مرزی بصورت زیر بیان می شود:

$$\left(\left(EA\xi-EA+k^2\rho A\omega^2\right)\left(\frac{d\bar{U}}{dx}\right)+\left(EAk-EAk\xi-k^3\rho A\omega^2\right)\left(\frac{d^2\bar{U}}{dx^2}\right)+\left(k^2EA\xi-k^2\rho\nu^2 I_p\omega^2\right)\left(\frac{d^3\bar{U}}{dx^3}\right)+k^3\left(\rho\nu^2 I_p\omega^2-EA\xi\right)\left(\frac{d^4\bar{U}}{dx^4}\right)\right)\Bigg|_{x=0}=0 \tag{۲۵}$$

$$\left(\left(EA\xi-EA+k^2\rho A\omega^2\right)\left(\frac{d\bar{U}}{dx}\right)+\left(EAk-EAk\xi-k^3\rho A\omega^2\right)\left(\frac{d^2\bar{U}}{dx^2}\right)+\left(k^2EA\xi-k^2\rho\nu^2 I_p\omega^2\right)\left(\frac{d^3\bar{U}}{dx^3}\right)+k^3\left(\rho\nu^2 I_p\omega^2-EA\xi\right)\left(\frac{d^4\bar{U}}{dx^4}\right)\right)\Bigg|_{x=L}=0 \tag{۲۶}$$

$$\bar{U}(0)=0 \tag{۲۷}$$

$$\bar{U}(L) = 0 \tag{۲۸}$$

با اعمال معادلات (۲۵)-(۲۸) در معادله (۲۲) و تشکیل یک ماتریس ۴×۴، و برابر صفر قرار دادن ماتریس ضرایب، معادله مشخصه نانومیله با شرایط مرزی گیردار-گیردار بدست می‌آید. با حل معادله فوق، فرکانس‌های طبیعی نانومیله قابل استخراج می‌باشد.

۳-۲ نانومیله نسبتا ضخیم با شرایط مرزی گیردار-آزاد

با در نظر گرفتن رابطه (۲۰)، برای نانومیله نسبتا ضخیم با شرایط مرزی گیردار-آزاد روابط شرایط مرزی بصورت زیر بیان می شود:

$$\left((EA\xi - EA + k^2\rho A\omega^2)\left(\frac{d\bar{U}}{dx}\right) + (EAk - EAk\xi - k^3\rho A\omega^2)\left(\frac{d^2\bar{U}}{dx^2}\right) + \left(k^2EA\xi - k^2\rho\nu^2 I_p\omega^2\right)\left(\frac{d^3\bar{U}}{dx^3}\right) + k^3\left(\rho\nu^2 I_p\omega^2 - EA\xi\right)\left(\frac{d^4\bar{U}}{dx^4}\right)\right)\Bigg|_{x=0} = 0 \tag{۲۹}$$

$$\left((EA\xi - EA + k^2\rho A\omega^2)\left(\frac{d\bar{U}}{dx}\right) + (EAk - EAk\xi - k^3\rho A\omega^2)\left(\frac{d^2\bar{U}}{dx^2}\right) + \left(k^2EA\xi - k^2\rho\nu^2 I_p\omega^2\right)\left(\frac{d^3\bar{U}}{dx^3}\right) + k^3\left(\rho\nu^2 I_p\omega^2 - EA\xi\right)\left(\frac{d^4\bar{U}}{dx^4}\right)\right)\Bigg|_{x=L} = 0 \tag{۳۰}$$

$$\left(\left(\rho\nu^2 I_p\kappa^2\omega^2 - \zeta EA\kappa^2\right)\left(\frac{d^3\bar{U}}{dx^3}\right) + \left(-\rho A\kappa^2\omega^2 + EA - \rho\nu^2 I_p\omega^2\right)\left(\frac{d\bar{U}}{dx}\right)\right)\Bigg|_{x=0} = 0 \tag{۳۱}$$

$$\left(\left(\rho\nu^2 I_p\kappa^2\omega^2 - \zeta EA\kappa^2\right)\left(\frac{d^3\bar{U}}{dx^3}\right) + \left(-\rho A\kappa^2\omega^2 + EA - \rho\nu^2 I_p\omega^2\right)\left(\frac{d\bar{U}}{dx}\right)\right)\Bigg|_{x=L} = 0 \tag{۳۲}$$

با اعمال معادلات (۲۹)-(۳۲) در معادله (۲۲) و تشکیل یک ماتریس ۴×۴، و برابر صفر قرار دادن ماتریس ضرایب، معادله مشخصه نانومیله با شرایط مرزی گیردار-آزاد بدست می‌آید. با حل معادله فوق، فرکانس‌های طبیعی نانومیله قابل استخراج می‌باشد.

۴- ارایه نتایج

۴-۱ اعتبارسنجی نتایج و روابط

ابتدا دقت و صحت روابط استخراج شده، از طریق مقایسه نتایج این پژوهش با نتایج ارایه شده در مراجع [۲, ۴] بررسی می‌گردد. بدین منظور، در جدول (۱) سه فرکانس اول نانومیله نسبتا ضخیم با شرایط مرزی گیردار-گیردار به ازای $\zeta = 1$ (فرکانس‌های کلاسیک) مقایسه شده است. مقادیر ویژگی‌های هندسی و مکانیکی بر اساس آنچه در مرجع [۲] داده شده است انتخاب شده است. همان‌طور که جدول (۱) نشان می‌دهد نتایج پژوهش حاضر با نتایج مرجع [۴] بسیار نزدیک می‌باشد اما اختلاف نتایج مرجع [۲] با نتایج پژوهش حاضر و مرجع [۴] بسیار زیاد است. دلیل این اختلاف زیاد، همان عدم استفاده از شرایط مرزی کلاسیک در حل معادلات دوفازی است. به دلیل همین اختلاف زیاد، در ادامه فقط نتایج حاضر از این پژوهش ارایه می‌گردد.

جدول ۱. مقایسه سه فرکانس اول نانومیله نسبتا ضخیم با شرایط مرزی گیردار-گیردار

ζ	$\frac{h}{L}$	فرکانس اول			فرکانس دوم			فرکانس سوم		
		پژوهش حاضر	مرجع [۲]	مرجع [۴]	پژوهش حاضر	مرجع [۲]	مرجع [۴]	پژوهش حاضر	مرجع [۲]	مرجع [۴]
۱	۰.۰۵	۱/۸۸۵	۲/۹۸۶	۱/۸۸۵	۳/۷۷۶	۵/۵۰۸	۳/۷۶۷	۵/۷۰۶	۸/۱۵۸	۵/۶۴۵
	۰.۱	۱/۸۸۴	۲/۹۸۱	۱/۸۸۴	۳/۷۶۸	۵/۴۹۲	۳/۷۵۹	۵/۶۸۵	۸/۰۹۲	۵/۶۱۷

۴-۲ ارایه نتایج جدید

در این بخش در جداول (۲) و (۳)، نتایج جدیدی ارایه گردیده است. نتایج جداول فوق نشان می‌دهد که با افزایش پارامتر دوفازی ζ، مقدار فرکانس کاهش می‌یابد. هم‌چنین با افزایش ضخامت نانومیله، بدلیل وابستگی انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل به پارامتر دوفازی، تغییرات متفاوتی مشاهده می‌شود. با افزایش پارامتر غیرمحلی نیز، مقدار فرکانس کاهش می‌یابد.

جدول ۲. سه فرکانس اول نانومیله نسبتا ضخیم به ازای دو شرط مرزی مختلف

ζ	$\frac{h}{L}$	فرکانس اول (TPa)		فرکانس دوم (TPa)		فرکانس سوم (TPa)	
		گیردار-گیردار	گیردار-آزاد	گیردار-گیردار	گیردار-آزاد	گیردار-گیردار	گیردار-آزاد
۰.۲۵	۰.۰۵	۱/۸۱۸	۰/۹۲۳	۳/۵۰۰	۲/۶۹۷	۴/۹۶۳	۴/۲۸۶
	۰.۱	۱/۸۱۷	۰/۹۲۲	۳/۴۹۸	۲/۶۹۴	۴/۹۵۸	۴/۲۸۰
۰.۵۰	۰.۰۵	۱/۵۰۴	۰/۷۵۶	۳/۰۱۰	۲/۲۷۳	۴/۴۹۵	۳/۷۸۴
	۰.۱	۱/۵۱۰	۰/۷۵۷	۳/۰۳۵	۲/۲۸۸	۴/۵۲۷	۳/۸۱۶

جدول ۳. سه فرکانس اول نانومیله نسبتا ضخیم به ازای دو شرط مرزی مختلف ($h = 0.1L$)

ζ	$\frac{k}{L}$	فرکانس اول (TPa)		فرکانس دوم (TPa)		فرکانس سوم (TPa)	
		گیردار-گیردار	گیردار-آزاد	گیردار-گیردار	گیردار-آزاد	گیردار-گیردار	گیردار-آزاد
۰.۱	۰.۱	۱/۷۹۳	۰/۹۲۸	۳/۲۱۹	۲/۵۶۹	۴/۲۲۳	۳/۷۸۷
	۰.۵	۰/۹۹۵	۰/۷۴۴	۱/۲۶۶	۱/۲۰۶	۱/۶۳۸	۱/۴۴۴
۰.۵۰	۰.۱	۱/۳۳۷	۰/۶۷۰	۲/۷۰۴	۲/۰۴۱	۴/۰۴۹	۳/۴۳۱
	۰.۵	۰/۶۶۷	۰/۳۱۴	۱/۸۶۰	۱/۵۱۲	۲/۹۴۶	۲/۷۴۳

۵- نتیجه‌گیری

هدف این مقاله بررسی ارتعاشات آزاد نانومیله‌های نسبتا ضخیم بر اساس تئوری الاستیسیته دوفازی می‌باشد. نانومیله نسبتا ضخیم با استفاده از تئوری رایلی مدل شده است. در این مقاله، اهمیت استفاده همزمان از شرایط مرزی کلاسیک و دوفازی برای حل معادله حرکت نشان داده شده است. این پژوهش می‌تواند مسیر روشنی برای سایر پژوهش‌های در فضای الاستیسیته دوفازی ایجاد نماید.

مراجع

1. A. Apuzzo, R. Barretta, F. Fabbrocino, S. A. Faghidian, R. Luciano, and F. Marotti De Sciarra, "Axial and torsional free vibrations of elastic nano-beams by stress-driven two-phase elasticity", *Journal of Applied and Computational Mechanics* 5(2), 402-413, (2019).
2. R. Nazemnezhad, R. Ashrafian, "Longitudinal Vibration of Nanobeams by Two-Phase Local/Nonlocal Elasticity, Rayleigh Theory, and Generalized Differential Quadrature Method", *Mechanics of Advanced Composite Structures* 10(2), 221-232, (2023).
3. R. Nazemnezhad, R. Ashrafian, and A. Mirafzal, "Bishop theory and longitudinal vibration of nano-beams by two-phase local/nonlocal elasticity", *Advances in nano research* 15(1), 75-89, (2023).
4. S. S. Rao: 'Vibration of continuous systems'; 2019, John Wiley & Sons.