ISAV2024
چهاردهمین کنفرانس بین المللی آکوستیک و ارتعاشات
۲۱و ۲۲ آذر ماه۱۴۰۳ کرج - ایران

مقایسه حل عددی و تحلیلی معادلات حاکم بر ارتعاشات تیر پیزوالکتریک برداشت کننده انرژی تحت جریان گردابی

محمد بیگدلو[آ]، مهدی زمانیان [ب*]

[آ]ایران، تهران، دانشگاه خوارزمی، دانشکده فنی و مهندسی، کدپستی: ۱۴۹۱۱-۱۵۷۱۹، دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک

[ب]ایران، تهران، دانشگاه خوارزمی، دانشکده فنی و مهندسی، کدپستی: ۱۴۹۱۱-۱۵۷۱۹، دانشیار گروه مهندسی مکانیک

*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: *zamanian@khu.ac.ir*

چکیده

در این مقاله به بررسی کارایی روش تئوری اغتشاشات در پیش بینی رفتار دینامیکی تیر برداشت کننده‌ی انرژی تحت اثر ریزش گردابه پرداخته می‌شود، بدین منظور یک استوانه‌ی مدور به انتهای تیر یک سر گیرداری که لایه‌ی پیزوالکتریک بر روی آن قرار دارد ضمیمه شده و جریان سیال، موازی با راستای تیر بر روی آن عبور داده می‌شود. تیر در اثر تولید گردابه‌های نوسانی در قسمت پشت استوانه که از تعامل سازه و سیال نشأت می‌گیرد، دچار ارتعاش عمود بر جریان سیال می‌شود. نیروی آیرودینامیکی توسط معادله‌ی نوسانگر وندرپول اصلاح شده مدلسازی می‌شود. همچنین از اصل همیلتون برای استخراج معادلات حرکت استفاده می‌شود. پس از بدست آوردن شکل مودهای ارتعاش آزاد از آن به عنوان تابع مقایسه‌ای در روش مودهای فرضی استفاده و معادلات گسسته به کمک معادله‌ی اولر لاگرانژ به دست می‌آید. معادلات به هر دو روش عددی و تحلیلی تئوری اغتشاشات حل می‌شوند و نتایج با هم مقایسه می‌شوند. نتایج نشان می‌دهد که روش تحلیلی ارائه شده در این مقاله به خوبی می‌تواند دینامیک برداشت انرژی را پیش بینی کند.

کلمات کلیدی: تئوری اغتشاشات؛ برداشت کننده‌ی انرژی پیزوالکتریک؛ تعامل سازه و سیال؛ مودهای فرضی.

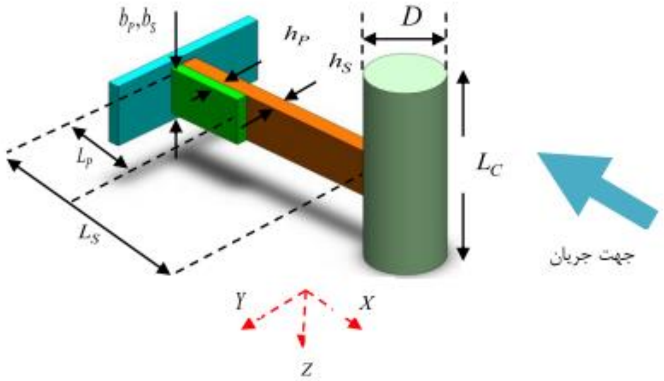
۱- مقدمه

برداشت انرژی از ارتعاشات ناشی از اندرکنش سازه و سیال و تبدیل آن به توان الکتریکی توسط مواد هوشمند مانند پیزوالکتریک توجه بسیاری از محققان را در سال‌های اخیر به خود جلب کرده است. این برداشت کننده‌ها عموما متشکل از یک تیر و یک جسم بلاف

متصل به آن هستند که جریان سیال بر روی جسم بلاف عبور داده می‌شود و تیر با لایه پیزوالکتریک به ارتعاش در می‌آید. برداشت کننده‌ها براساس شکل جسم بلاف در اثر پدیده‌های مختلفی به ارتعاش واداشته می‌شوند که می‌توان به ارتعاش ناشی از ریزش گردابه[۱]، گلوپینگ[۱]، فلاتر[۱]، و ارتعاشات ناشی از چاه [۱]، اشاره کرد. برداشت کننده‌ی انرژی ناشی از ریزش گردابه می‌تواند سیال‌هایی که با سرعت‌های پایین در جریان هستند را به توان الکتریکی تبدیل کند[۱]. در این برداشت کننده‌ها با افزایش سرعت سیال، فرکانس ریزش گردابه نیز افزایش می‌یابد و با افزایش بیشتر و نزدیک شدن به فرکانس طبیعی سازه، فرکانس ریزش گردابه بر روی فرکانس طبیعی قفل شده و دامنه‌ی ارتعاش به شدت افزایش می‌یابد و در ادامه مجددا دامنه کاهش می‌یابد. به این ناحیه از سرعت سیال ناحیه لاکین می‌گویند. در این سیستم‌ها معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر حرکت که کوپل با نیروی درگ می‌باشد با اعمال روش مودهای فرضی در معادلات انرژی و سپس اعمال معادله‌ی اولر لاگرانژ به صورت جداسازی شده به دست می‌آیند. معادله دیفرانسیل حاکم بر نیروی درگ به صورت یک معادله‌ی وندرپول کوپل با شتاب سیلندر در نظر گرفته می‌شود. همچنین معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر ولتاژ خروجی که کوپل با سازه می‌باشد نیز عموما به کمک معادله‌ی گاوس استخراج می‌شود. حل معادلات جداسازی شده به علت غیرخطی بودن و کوپل بودن با هم یک چالش می‌باشد. در تحقیقات قبلی این معادلات برای تیر با لایه‌ی پیزوالکتریک و استوانه در انتها به صورت عددی حل شدند[۲]. اخیرا زمانیان و ... حل تحلیلی مبتنی بر روش تئوری اغتشاشات را برای تیر با استوانه به صورت دمبل در وسط ارائه کردند. تحقیقات آن‌ها نشان داد روش تئوری اغتشاشات می‌تواند پیش بینی خوبی از دینامیک سیستم به شرط صرف نظر از کشش لایه‌ی میانی داشته باشد[۳]. بررسی تاریخچه‌ی تحقیقات نشان می‌دهد که مطالعه‌ی تئوری یا همان حل تحلیلی در مورد تیر یک سر گیردار با استوانه در انتها صورت نگرفته است، که در این مقاله به آن پرداخته می‌شود.

۲- مدل سازی و فرمول بندی

همانطور که اشاره شد برداشت کننده‌ی انرژی مورد بررسی، یک تیر یک سر گیردار پیزوالکتریک با یک استوانه مدور متصل به انتهای آن، تحت جریان گردابی است که در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل ۱: ترکیب بندی تیر مرتعش تحت تحریک ناشی از گردابه

برای به دست آوردن معادلات کاهش مرتبه یافته عبارت‌های انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل و کار نیروهای خارجی به صورت زیر می‌باشد[۴]و[۵]:

$$\Pi_k = \frac{1}{2}\int_0^{L_s} M(X)\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 dX + \left(\frac{1}{2}M_C\left(\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{D}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial X\,\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}I_C\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X\,\partial t}\right)^2\right)\Bigg|_{X=L_S}, \qquad (۱)$$

$$\Pi_\varepsilon = \frac{1}{2}\int_0^{L_s} I_Z(X)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}\right)^2 dX - \frac{1}{2}\int_0^{L_P}(H(X)-H(X-L_P))e_{31}A_P\frac{V(t)}{h_P}\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}dX,$$

$$\delta\Pi_f = \frac{1}{4}\rho_f U^2 C_{L0} D q(t)\int_0^{L_s}\delta W_C\, dX - \left(2\pi S_T\frac{U}{D}\gamma\rho_f D^2\right)\int_0^{L_s}\dot{W}_C\,\delta W_C\, dX$$

که در آن M_C، D و I_C به ترتیب جرم، قطر و گشتاور اینرسی جرمی استوانه حول محور موازی با Z، در مرکز جرم آن است. $M(X)$ و $I_Z(X)$ به ترتیب جرم تیر بر واحد طول و ممان اینرسی سطح مقطع در طول تیر می‌باشند. L_s، L_P و L_C نیز طول تیر

،لایه‌ی پیزوالکتریک و استوانه هستند. همچنین e_{31} و $V(t)$ به ترتیب ضریب تنش و ولتاژ خروجی پیزوالکتریک بوده، و $e_{31}=E_p d_{31}$، که در آن d_{31} و E_P ثابت کرنش و مدول یانگ پیزوالکتریک هستند. از طرفی A_P، گشتاور اول سطح مقطع ماده پیزوالکتریک حول محور خنثی خمشی و h_P ضخامت لایه‌ی پیزو الکتریک می باشد. و همچنین ρ_f و U چگالی و سرعت جریان سیال، C_{L0}ضریب لیفت، و $q(t)$ برای توصیف رفتار گردابه‌ها در نزدیکی استوانه به کار می‌رود، و γ پارامتری است که با میانگین ضریب درگ مقطعی مرتبط است[۵]: $\gamma=\frac{C_D}{4\pi S_T}$، در این رابطه هم، S_T بیانگر عدد استروهال و C_D ضریب درگ است. از طرفی W_C بیانگر جابجایی عرضی استوانه بوده و با رابطه‌ی زیر نشان داده می‌شود (استوانه به صورت صلب در نظر گرفته شده است:

$$W_C = W\Big|_{X=L_S} + \frac{D}{2}\frac{\partial W}{\partial X}\Big|_{X=L_S} \tag{۲}$$

ازطرفی معادلات کوپل جریان سیال به صورت معادله‌ی وندرپول در نظر گرفته می‌شود[۲]:

$$\ddot{q}(t)+\lambda\omega_S(q(t)^2-1)\dot{q}(t)+\omega_S^2 q(t)=\left(\frac{G}{D}\right)\left[\ddot{W}(L_S,t)+\frac{D}{2}\ddot{W}'(L_S,t)\right] \tag{۳}$$

که در آن $\lambda=0.3$ ، $G=12$ و ω_S نیز نشان دهنده‌ی فرکانس ریزش گردابه‌ها می‌باشد که با رابطه‌ی $\omega_S=\frac{2\pi S_T U}{D}$ بیان می‌شود. معادله‌ی حاکم بر ولتاژ خروجی لایه پیزوالکتریک با استفاده از قانون گاوس به صورت زیر خواهد شد[۴]:

$$e_{31}b_P h_P\int_0^{L_P}\frac{\partial^3 W}{\partial X^2\partial t}ds+\frac{\varepsilon_{33}b_P L_P}{h_P}\frac{dV(t)}{dt}+\frac{V(t)}{R}=0 \tag{۴}$$

در حالیکه b_P پهنای لایه‌ی پیزو و ε_{33}، ضریب گذردهی ماده‌ی پیزوالکتریک، و R، مقاوت بار می‌باشند.

برای راحتی تحلیل، تغییر متغیرهای زیر در معادله‌ی حرکت اعمال می‌شود[۴]:

$$w=\frac{W}{D}\ ,\ x=\frac{X}{L_S}\ ,\ \tau=\frac{t}{T}\ ,\ T=\sqrt{\frac{\rho_S A_S L_S^4}{E_S I_S}} \tag{۵}$$

در رابطه بالا ρ_S، A_S و E_S به ترتیب چگالی، مساحت مقطع و مدول یانگ تیر هستند. شکل بی بعد معادله‌ی ارتعاش آزاد (۱) و شرایط مرزی پس از جایگزینی متغیرهای روابط (۵) در معادله‌ی (۱) مانند رابطه‌ی زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\bar{I}_Z(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})+\bar{m}(x)\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}=0\,, \qquad \bar{I}_Z(x)=\frac{I_Z(X)}{I_s}\Big|_{X=L_S x}\,, \tag{۶}$$

$$I_S=\frac{1}{12}b_S h_S^3\ ,\qquad m_S=\rho_S b_S h_S\,,\qquad \bar{m}(x)=\frac{M(X)}{m_S}\Big|_{X=L_S x}$$

در حالیکه:

$$w\big|_{x=0}=0\,,\ \frac{\partial w}{\partial x}\big|_{x=0}=0\,,\ \left(\frac{I_S D}{L_S^3}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-\frac{M_C D}{T^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}+\frac{D}{2L_S}\frac{\partial^3 w}{\partial\tau^2\partial x}\right)\right)\Big|_{x=\frac{L_S}{L_S}}=0$$

$$\left(\frac{I_S D}{L_S^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{D^2 M_C}{2T^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}+\frac{D}{2L_S}\frac{\partial^3 w}{\partial\tau^2\partial x}\right)+\frac{I_c D}{L_S T^2}\frac{\partial^3 w}{\partial\tau^2\partial x}\right)\Big|_{x=\frac{L_S}{L_S}}=0 \tag{۷}$$

در این روابط، b_S، h_S و I_S پهنا، ضخامت و ممان اینرسی دوم سطح مقطع تیر می‌باشند. شکل مود ارتعاش آزاد سیستم را می‌توان با فرض $w(x,\tau)=\varphi(x)e^{i\omega t}$، و جایگذاری آن درمعادله‌ی (۶) و ارضای شرایط مرزی (۷) به دست آورد. سپس با فرض پاسخ سیستم

تحت ارتعاش ناشی از گرداب به صورت $w(x,\tau)=\varphi(x)P(\tau)$، معادلات حاکم بر حرکت را برحسب متغیرهای بی بعد به کمک معادله اویلر لاگرانژ به صورت زیر می توان بدست آورد:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial(\Pi_k-\Pi_\varepsilon)}{\partial\dot{P}(\tau)}-\frac{\partial(\Pi_k-\Pi_\varepsilon)}{\partial P(\tau)}=\frac{\delta\Pi_f}{\delta P(\tau)} \quad (۸)$$

با اعمال معادله اولر لاگرانژ معادلات حرکت به صورت زیر خواهند شد:

$$\ddot{P}(\tau)+\varepsilon C_{eq}\dot{P}(\tau)+\omega_i^2\dot{P}(\tau)-\varepsilon\alpha v(\tau)=\varepsilon F_{eq}q(\tau), X\dot{P}_i(\tau)+C_P\dot{v}(\tau)+\frac{v(\tau)}{R}=0,$$
$$\frac{d^2q(\tau)}{d\tau^2}+\varepsilon\eta\Omega_f(q^2(\tau)-1)\frac{dq(\tau)}{d\tau}+\Omega_f^2q(\tau)=\varepsilon G\frac{d^2p(\tau)}{d\tau^2} \quad (۹)$$

در حالیکه:

$$m_{eq}=\int_0^1\left(m(X)\Big|_{X=L_Sx}\frac{D^2}{2T^2}(\varphi(x))^2\right)L_Sdx+\left(\frac{1}{2}M_c\frac{D^2}{T^2}\left(\varphi(x)+\frac{D}{2L_S}\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)^2+\frac{1}{2}I_c\frac{D^2}{L_S^2T^2}\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)^2\Bigg|_{x=\frac{L_S}{L_S}}\right)$$

$$k_{eq}=\int_0^{\frac{L_S}{L_S}}I_Z(X)\Big|_{X=L_Sx}\left(\frac{D}{L_S^2}\right)^2\left(\frac{d^2\varphi(x)}{d^2x}\right)L_Sdx\ ,\ C_{eq}=2\xi\omega_n^2+\Omega_fL_C\left(\frac{\gamma\rho_fD^4}{T^2}\right)\int_0^1\varphi_C^2dx\dot{P}\delta P\ ,\ \omega_i^2=\frac{k_{eq}}{m_{eq}}$$

$$\alpha=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{L_P}{L_S}}(H(x)-H(x-\frac{L_P}{L_S}))e_{31}A_P\frac{V(t)}{h_P}\frac{D}{L_S^2}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}L_Sdx\ , \quad (۱۰)$$

$$F_{eq}=\frac{1}{4}\rho_fU^2C_{L0}D^2L_Cq(t)\int_0^1\varphi_Cdx\delta P\ ,\ X=e_{31}b_Ph_P\frac{dP}{dt}\int_0^{\frac{L_P}{L_S}}\varphi''(x)dx\ ,\ C_P=\frac{\varepsilon_{33}b_PL_P}{h_P}$$

۳- حل به روش عددی و تحلیلی تئوری اغتشاشات

حل عددی معادلات کوپل شده‌ی نشان داده شده در معادله (۹) به روش عددی rkf45 در نرم افزار میپل به دست آمدند. در ادامه به نحوه حل از طریق روش تئوری پرداخته می شود. برای این هدف پاسخ معادلات (۹) با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه در تئوری اغتشاشات به صورت زیر فرض می‌شود:

$$P(\tau)=P_0(T_0,T_1)+\varepsilon P_1(T_0,T_1),q(\tau)=q_0(T_0,T_1)+\varepsilon q_1(T_0,T_1),V(\tau)=V_0(T_0,T_1)+\varepsilon V_1(T_0,T_1) \quad (۱۱)$$

که در آن $T_0=\tau$ و $T_1=\varepsilon\tau$، مقیاس‌های زمانی هستند.با جایگذاری معادلات (۱۱) در (۹) و تفکیک عبارت‌های مرتبه‌ی ۱ و مرتبه‌ی ε معادلات زیر به دست می‌آید:

مرتبه‌ی ۱:

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2}P_0(T_0,T_1)+\omega_n^2P_0(T_0,T_1)=0,\frac{\partial^2}{\partial T_0^2}q_0(T_0,T_1)+\Omega_f^2q_0(T_0,T_1)=0,C_P\frac{\partial}{\partial T_0}V_0(T_0,T_1)+\frac{1}{R}V_0(T_0,T_1)=-X\frac{\partial}{\partial T_0}P_0(T_0,T_1) \quad (۱۲)$$

مرتبه‌ی ε:

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2}P_1(T_0,T_1)+\omega_n^2P_1(T_0,T_1)=-2\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_1}P_0(T_0,T_1)-C_{eq}\frac{\partial}{\partial T_0}P_0(T_0,T_1)+\alpha V_0(T_0,T_1)+F_{eq}\Omega_f^2q_0(T_0,T_1),$$
$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2}q_1(T_0,T_1)+\Omega_f^2q_1(T_0,T_1)=-2\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_1}q_0(T_0,T_1)-\eta\Omega_f\left[q_0(T_0,T_1)^2-1\right]\frac{\partial}{\partial T_0}q_0(T_0,T_1)+G\frac{\partial^2}{\partial T_0^2}P_0(T_0,T_1),$$
$$C_P\frac{\partial}{\partial T_0}V_1(T_0,T_1)+\frac{1}{R}V_1(T_0,T_1)=-C_P\frac{\partial}{\partial T_1}V_0(T_0,T_1)-X\left(\frac{\partial}{\partial T_1}P_0(T_0,T_1)+\frac{\partial}{\partial T_0}P_1(T_0,T_1)\right) \quad (۱۳)$$

حل معادلات (۱۲) به صورت زیر خواهد بود:

$$P_0 = A(T_1)e^{i\omega_n T_0} + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega_n T_0}, q_0 = B(T_1)e^{i\Omega_f T_0} + \bar{B}(T_1)e^{-i\Omega_f T_0},$$
$$V_0 = \frac{-i\omega_n X\bar{A}(T_1)\mathrm{R}}{iRC_P\omega_n - 1}e^{-i\omega_n T_0} - \frac{i\omega_n XA(T_1)\mathrm{R}}{iRC_P\omega_n + 1}e^{i\omega_n T_0} + \bar{E}e^{\frac{-T_0}{RC_P}} \quad (۱٤)$$

در این عبارت $\bar{E}e^{\frac{-T_0}{RC_P}}$ ، حل گذرا بوده و با گذشت زمان به صفر میل می‌کند، برای محاسبه‌ی پاسخ سیستم در حالت پایدار کافی است ضرایب A و B محاسبه شوند. با جایگذاری معادلات (۱۴) در (۱۳):

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0{}^2}P_1(T_0,T_1) + \omega_n^2 P_1(T_0,T_1) = -2\frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1}(A(T_1)e^{i\omega_n T_0} + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega_n T_0}) - C_{eq}\frac{\partial}{\partial T_0}(A(T_1)e^{i\omega_n T_0} + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega_n T_0})$$
$$+\alpha(\frac{-i\omega_n X\bar{A}(T_1)\mathrm{R}}{iRC_P\omega_n - 1}e^{-i\omega_n T_0} - \frac{i\omega_n XA(T_1)\mathrm{R}}{iRC_P\omega_n + 1}e^{i\omega_n T_0} + \bar{E}e^{\frac{-T_0}{RC_P}}) + F_{eq}\Omega_f^2(B(T_1)e^{i\Omega_f T_0} + \bar{B}(T_1)e^{-i\Omega_f T_0}), \quad (۱۵)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2}q_1(T_0,T_1) + \Omega_f^2 q_1(T_0,T_1) = -2\frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1}(B(T_1)e^{i\Omega_f T_0} + \bar{B}(T_1)e^{-i\Omega_f T_0})$$
$$-\eta\Omega_f\left[(B(T_1)e^{i\Omega_f T_0} + \bar{B}(T_1)e^{-i\Omega_f T_0})^2 - 1\right]\frac{\partial}{\partial T_0}(B(T_1)e^{i\Omega_f T_0} + \bar{B}(T_1)e^{-i\Omega_f T_0}) + G\frac{\partial^2}{\partial T_0{}^2}(A(T_1)e^{i\omega_n T_0} + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega_n T_0})$$

با مساوی صفر قرار دادن ترم‌های سکولار و جایگذاری $A(T_1) = \frac{1}{2}a(T_1)e^{i\alpha T_1}, B(T_1) = \frac{1}{2}b(T_1)e^{i\beta T_1}$ ، و همچنین $\Omega_f = \omega_n + \sigma\varepsilon$ در نهایت معادلات زیر محاسبه می‌شود:

$$\dot{a} = -\frac{C_{eq}a}{2} - \frac{\alpha XaR}{2(R^2C_P^2\omega_n^2 + 1)} + \frac{F_{eq}\Omega_f^2 b}{2\omega_n}\sin(\beta + \sigma T_1 - \alpha) \quad ,$$
$$\dot{\alpha} = \frac{\omega_n C_P XR^2\alpha}{2(R^2C_P^2\omega_n^2 + 1)} - \frac{F_{eq}\Omega_f^2 b}{2a\omega_n}\cos(\beta + \sigma T_1 - \alpha) \quad , \quad (۱۶)$$
$$\dot{b} = -\frac{\eta\Omega_f b}{8}(b^2 - 4) - \frac{G\omega_n^2 a}{2\Omega_f}\sin(\alpha - \beta - \sigma T_1) \quad , \quad \dot{\beta} = \frac{G\omega_n^2 a}{2b\Omega_f}\cos(\alpha - \beta - \sigma T_1)$$

با تغییر متغیر ($\psi = \beta + \sigma T_1 - \alpha$ و باز نویسی معادلات بالا:

$$\dot{a} = -\frac{C_{eq}a}{2} - \frac{\alpha XaR}{2(R^2C_P^2\omega_n^2 + 1)} + \frac{F_{eq}\Omega_f^2 b}{2\omega_n}\sin\psi \ , \ \dot{b} = -\frac{\eta\Omega_f b}{8}(b^2 - 4) + \frac{G\omega_n^2 a}{2\Omega_f}\sin\psi \quad (۱۷)$$
$$,\dot{\psi} = (\frac{G\omega_n^2 a}{2b\Omega_f} + \frac{F_{eq}\Omega_f^2 b}{2a\omega_n})\cos\psi + \sigma - \frac{\omega_n C_P XR^2\alpha}{2(R^2C_P^2\omega_n^2 + 1)}$$

۴- بحث و نتایج

برای تعیین دقت حل عددی برداشت کننده‌ی انرژی، از طریق مقایسه‌ی آن با حل تحلیلی از داده های جدول زیر استفاده شده است:

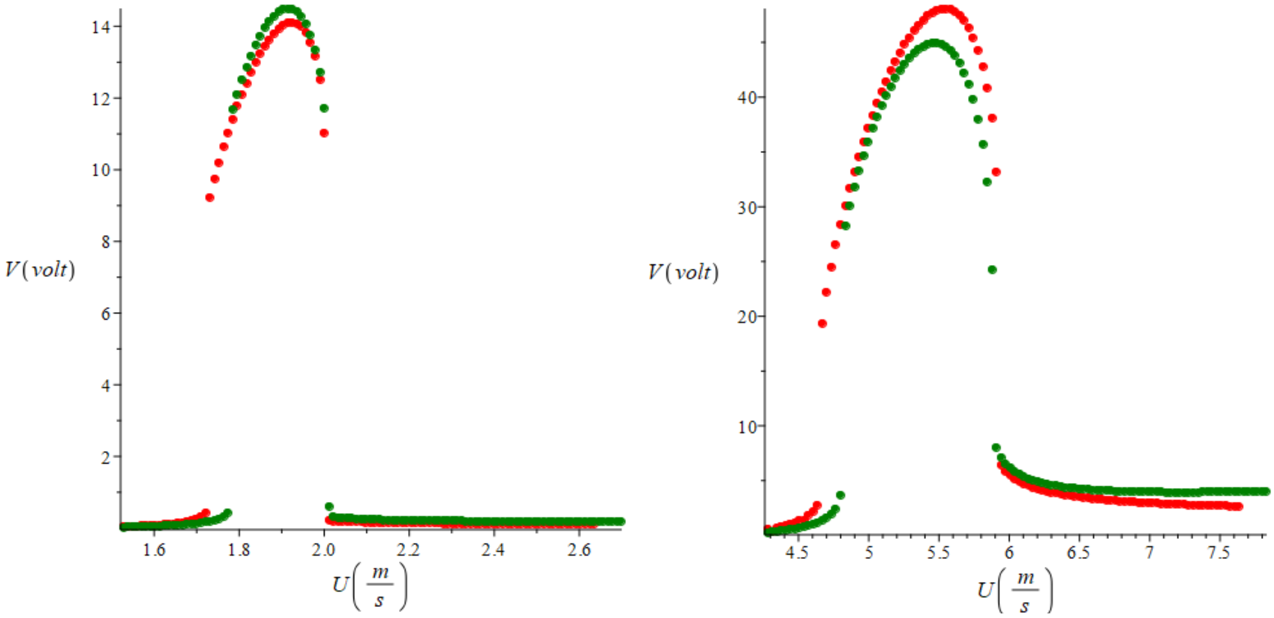
جدول ۱. پارامترهای فیزیکی و هندسی برداشت کننده

اجزا	طول L_P ، L_S ، L_C (mm)	پهنا b_p ، b_s (mm)	ضخامت h_p ، h_S (mm)	قطر D (mm)	چگالی ρ_S ، ρ_P kg/m^3	مدول‌یانگ E_S ، E_P (GPa)	ضریب گذردهی ε_{33} $(nF.m^{-1})$	جرم m_S ، m_P ، M_C گرم
تیر	۲۶۷	۳۲,۵	۰.۶۳۵	_	۲۷۳۰	۷۷		۱۶
لایه‌ی pzt	۳۱,۸	۳۲.۵	۰.۲۶۷	_	۷۸۰۰	۶۶	۱۳,۲۸	۱,۶۸
استوانه	۲۰۳	_	_	۲*۱۹,۸	_	_		۱۶

همانطور که در شکل (۲)، قسمت الف، مشاهده می‌شود، بیشترین میزان انرژی برداشت شده در حل عددی و تحلیلی در سرعت باد ۱,۹۲متر بر ثانیه به ترتیب ۱۴,۱ولت و ۱۴,۴ولت می‌باشد، بنابراین همانطور که گفته شد، حل تحلیلی به میزان قابل توجهی دینامیک سیستم برداشت کننده‌ی انرژی را به درستی پیش بینی کرده و نتایج حل عددی را تصدیق می‌کند. سوالی که پیش می آید این است که تطابق حل عددی و تحلیلی با توجه به تغییر پارامترهای سیستم و به طور خاص قطر استوانه و ضخامت لایه‌ی پیزوالکتریک چگونه خواهد بود. برای پاسخ به این سوال، مقایسه با افزایش قطر استوانه در شکل(۲)، قسمت ب، نشان داده شده است. این شکل نشان می دهد که با افزایش قطر استوانه بر میزان اختلاف حل عددی و حل از طریق تئوری اغتشاشات اضافه شده است. و روش تحلیلی مقدار کمتری را برای ولتاژ برداشت شده پیش بینی کرده است:

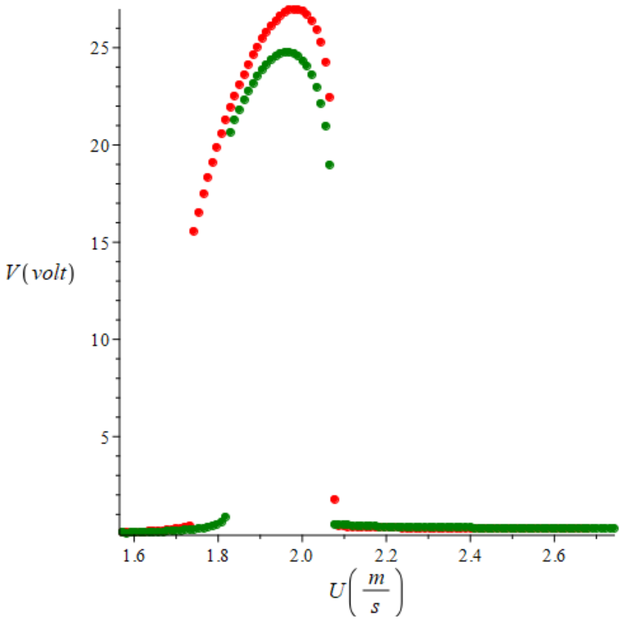
ب:

الف:



شکل (۲): تغییرات ولتاژ برداشت شده بر حسب تغییرات سرعت باد. الف: $D = 2\times 19.8mm$ ب: $D = 2\times 60mm$ (گراف سبز رنگ منعلق به حل تحلیلی بوده و گراف قرمز رنگ متعلق به حل عددی می‌باشد).

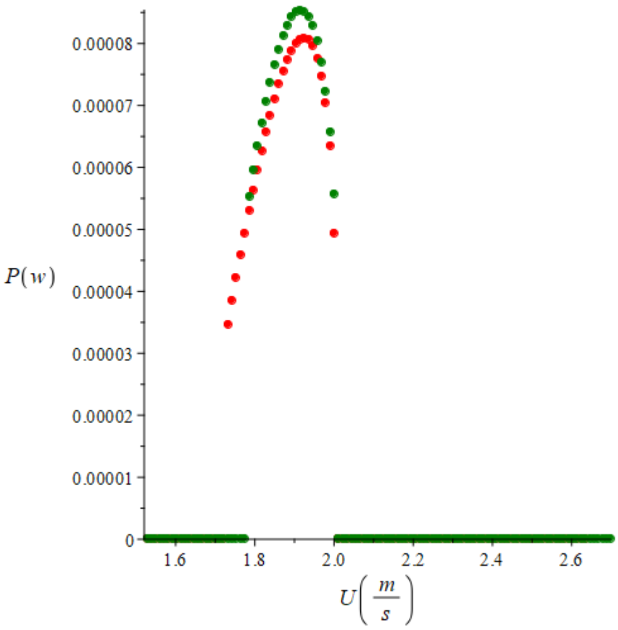
دلیل این امر آن است که با افزایش قطر استوانه، ناحیه لاکین (ناحیه ای که در آن دامنه ارتعاش قابل توجه است)، در سرعت های بالاتری از باد اتفاق می‌افتد، و دامنه ارتعاش و نیروی درگ نیز با افزایش قطر استوانه افزایش می یابد. که در مرجع [۵] به طور مفصل توسط زمانیان و گریبلدی شرح داده شده است. لذا طبیعی است که در حل تحلیلی (تئوری اغتشاشات) بالانس جملات خطی و غیر خطی با بزرگ شدن برخی از این جملات، ناممکن شده و تا حدی از روش عددی که همه جملات را با هم بالانس می‌کند فاصله می‌گیرد. (چرا که طبق تعریف تئوری اغتشاشات ترم غیرخطی ضعیف فرض می‌شود و با افزایش پارامترهایی مثل قطر استوانه یا ضخامت لایه پیزوالکتریک، ترم های خطی قوی تر می‌شوند وبالانس آن ها با ترم غیر خطی به هم می‌ریزد). این موضوع در خصوص ضخامت لایه‌ی پیزوالکتریک هم صادق است، و همانطور که در شکل (۳) نیز مشاهده می‌شود، با افزایش ضخامت لایه‌ی پیزوالکتریک میزان اختلاف حل عددی و تحلیلی افزایش یافته است، که همانطور که در بالا نیز اشاره شد، این امر ناشی از عدم بالانس همه‌ی جملات با بزرگ شدن برخی از آنها در تئوری اغتشاشات است.



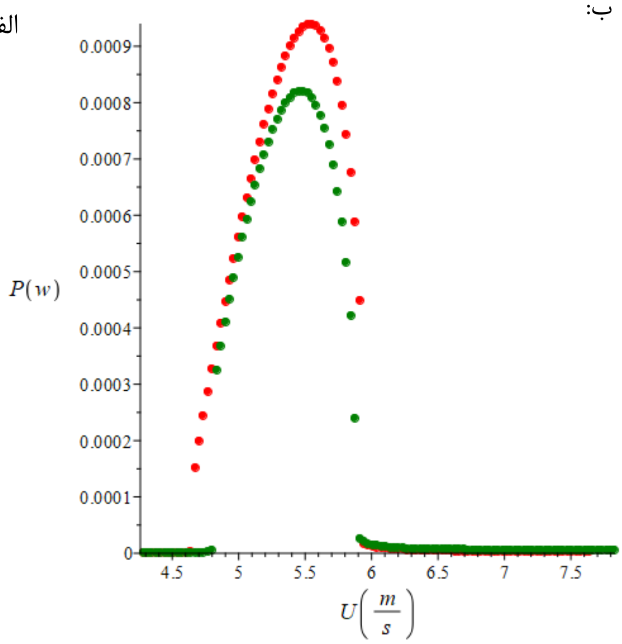
شکل (۳): تغییرات ولتاژ برداشت شده بر حسب تغییرات سرعت باد با فرض $h_p = 1mm$

میزان تطابق حل عددی و حل تحلیلی (شکل(۴)، قسمت الف) و اختلافی که این دو حل با افزایش قطر استوانه(شکل(۴)، قسمت ب) و ضخامت لایه‌ی پیزوالکتریک(شکل(۵)) پیدا می کنند برای تغییرات توان برداشت شده بر حسب تغییرات سرعت باد نیز، در شکل های زیر نشان داده شده است.

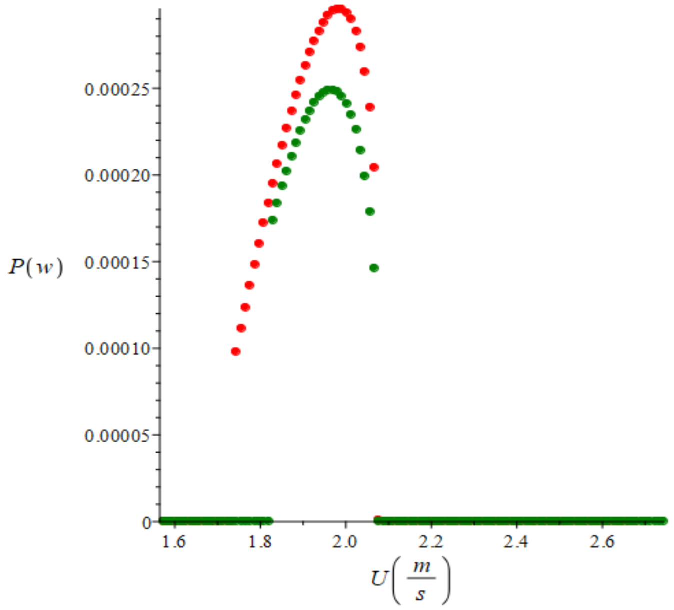
الف:



ب:



شکل (۴): تغییرات توان برداشت شده بر حسب تغییرات سرعت باد. الف): $D = 2\times 19.8mm$ ب): $D = 2\times 60mm$ (گراف سبز رنگ منعلق به حل تحلیلی بوده و گراف قرمز رنگ متعلق به حل عددی می‌باشد).



شکل (۵): تغییرات توان برداشت شده بر حسب تغییرات سرعت باد با فرض $h_p = 1mm$

۵- نتیجه گیری:

نتایج نشان داد روش تئوری اغتشاشات به خوبی می تواند رفتار دینامیکی تیر برداشت کننده‌ی انرژی تحت اثر ریزش گردابه را پیش بینی کند. این بررسی نشان داد با افزایش قطر استوانه تحت جریان گردابی متصل به انتهای تیر یکسر درگیر، و همچنین با افزایش ضخامت لایه‌ی پیزوالکتریک ضمیمه شده بر روی تیر، اختلاف روش عددی و روش تحلیلی به صورت محدود افزایش می‌یابد، اما الگوی پیش بینی شده کاملا بر هم منطبق هستند.

مراجع

[1] J.Wang, L.Geng, L.Ding, H.Zhu, D.Yurchenko, "The state-of-the-art review on energy harvesting from flow-induced vibrations '', *Applied Energy*,267,114905 ,(2020).

[2] H. L. Dai, A. Abdelkefi, L. Wang. ''Piezoelectric energy harvesting from concurrent vortex-induced vibrations and base excitations'', *Nonlinear Dynamics*, 77,967-981,(2014).

[3]M. Alimanesh, M. Zamanian,"Analysis of clamped-clamped piezoelectric energy harvester under vortex induced vibration considering the stretching effect",*Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 35,333-351,(2023).

[4] M.Zamanian, B.Firouzi,''Analysis and optimal design of vibration- based Paddle type piezoelectric energy harvester under electrostatic actuation'', *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 12,6723–6740, (2024).

[5] M.Zamanian, L.Garibaldi, ,'' Vortex induced vibration analysis of a cylinder mounted on a flexible rod '' ,*Wind and Structures*, 441-445, 29(2019).