تحلیل دینامیکی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی(FGM) تقویت شده با روش هامیلتون و المان محدود

سعید بختیارآقاملکی [آ]، امیرحسین هاشمیان [ب*]، مهدی فکور [پ]

[آ] ایران، تهران، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، گروه مهندسی هوافضا، ۱۴۷۷۸۹۳۸۵۵، دانشجوی دکتری

[ب*] ایران، تهران، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، گروه مهندسی هوافضا، ۱۴۷۷۸۹۳۸۵۵، استادیار

[پ] ایران، تهران، دانشگاه تهران، گروه مهندسی هوافضا، ۱۴۱۷۹۳۵۸۴۰، استاد

*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: *amir_hashemian@srbiau.ac.ir*

چکیده

به دلیل کاربرد وسیع پوسته‌ها در صنایع مختلف از جمله هوافضا، دریایی، بیوتکنولوژی و ... و از طرفی هزینه‌های مربوط به ساخت و تولید آنها و همچنین تهیه مواد اولیه، بسیار اهمیت دارد. خواص مواد پوسته استوانه‌ای FG با توجه به قانون توزیع توان کسر حجمی اجزای تشکیل دهنده، به طور هموار و پیوسته در ضخامت متغیر است. رفتار ارتعاشی و معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای تقویت شده مدرج تابعی روی بستر الاستیک با استفاده از اصل همیلتون، نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش اجزای محدود به‌دست آمده‌اند. نتایج عددی برای بررسی اثر عوامل مختلفی مانند توزیع کسر حجمی، طول و ضخامت، شرایط مرزی مختلف، ضرایب سختی و همچنین فرکانس طبیعی پاسخ‌های دینامیکی پوسته استوانه‌ای FG به‌دست می‌آید. در نهایت، سازگاری نتایج مدل‌سازی تحلیلی با نرم‌افزار تجاری اجزای محدود بررسی شد که تطابق خوبی را نشان داد.

واژه های کلیدی: پوسته استوانه‌ایFG؛ ارتعاش آزاد؛ روش اجزا محدود؛ فرکانس طبیعی.

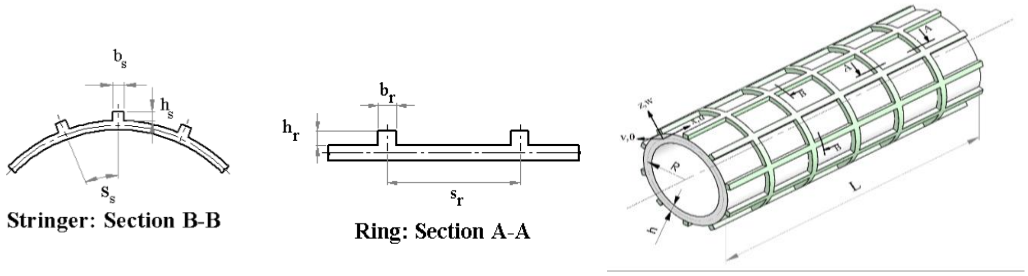
۱.مقدمه

سازه‌های پوسته‌ای و صفحه‌ای و استفاده از مواد FG کاربردهای گسترده‌ای در رشته‌های مهندسی و صنایع مختلف دارند که مطالعات این نوع سازه‌ها به طور خاص توجه بسیاری از دانشمندان در سراسر جهان را به خود جلب کرده‌اند. ارتعاشات و کنترل آنها از پارامترهای مهمی است که در طراحی و تحلیل سازه مورد توجه قرار می‌گیرد. بنابراین رفتار ارتعاشی سازه، به ویژه فرکانس‌های طبیعی سیستم و عوامل مؤثر بر مقادیر آنها باید مورد بررسی قرار گیرد. تران و همکاران [۱] ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای دایره‌ای مدرج تابعی تقویت شده که بر بستر وینکلر-پاسترناک با شرایط مرزی مختلف تحت محیط حرارتی قرار گرفته است را بررسی نمودند. در مطالعه آنها برای توسعه یک راه حل تحلیلی از فرکانس‌های طبیعی برای ساختار پوسته استوانه‌ای FG تقویت شده که بر بستر الاستیک قرار دارد، از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، تکنیک تقویت شده لخنیتسکی، اصل همیلتون و روش گالرکین استفاده شد. نگوین و همکاران [۲] نیز یک راه حل تحلیلی برای ارتعاش آزاد ساختار پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده که

بر بستر الاستیک قرار دارد را به دست آوردند. رویکرد ما در این تحقیق بررسی رفتار ارتعاشی پوسته استوانه‌ای تقویت شده FG بر بستر الاستیک است. علاوه بر این، دستیابی به بالاترین فرکانس طبیعی به عنوان یک تابع هدف در پارامترهای هندسی در نظر گرفته شد. همچنین تأثیر شاخص کسر حجمی در تحلیل فرکانس طبیعی و تأثیر پارامترهای بستر الاستیک مورد بررسی و اعتبارسنجی قرار گرفت. معادلات تعادل با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول و اصل همیلتون به دست آمده است.

۲. شرح هندسه

ابعاد هندسی ساختار پوسته استوانه‌ای به شرح زیر (شکل۱) است: R شعاع، h ضخامت و L طول ساختار پوسته استوانه‌ای FG در سیستم مختصات (x,θ,z) است. پوسته توسط رینگ‌ها (تقویت‌کننده‌های محیطی) و استرینگرها (تقویت‌کننده‌های طولی)، تقویت می‌شود.



شکل ۱. هندسه و سیستم مختصات مرجع پوسته استوانه‌ایFG تقویت شده[۱]

این تغییر خواص مواد پوسته استوانه‌ای مطابق رابطه زیر فرض می‌شود[۱]:

$$P(z,T) = P_i + (P_o - Pi)(\frac{z}{h} + \frac{1}{2})^p \qquad (۱)$$

مدول الاستیسیته، جرم چگالی و نسبت پواسون مواد پوسته به صورت رابطه (۲) در نظر گرفته شده است[۲]:

$$E(z) = (E_1 - E_2)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p + E_2; \quad \rho(z) = (\rho_1 - \rho_2)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p + \rho_2; \quad \nu(z) = (\nu_1 - \nu_2)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p + \nu_2 \qquad (۲)$$

که در آن P شاخص کسر حجمی است و E_1, ρ_1, υ_1 به ترتیب مدول الاستیسیته، جرم چگالی و نسبت پواسون ماده در سطح خارجی پوسته استوانه‌ای هستند. همچنین E_2, ρ_2, υ_2 مدول الاستیسیته، جرم چگالی و نسبت پواسون ماده در سطح داخلی پوسته استوانه‌ای FG هستند.

۳. فرمول های تئوری

در این مطالعه، با توجه به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول(FSDT) ، میدان جابجایی یک نقطه واقع در سطح میانی ساختار پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی به صورت رابطه (۳) تعریف می‌شود[۱و۵]:

$$u(x,\theta,z,t) = u_0(x,\theta,t) + z.\phi_x(x,\theta,t); \qquad v(x,\theta,z,t) = v_0(x,\theta,t) + z.\phi_\theta(x,\theta,t); \qquad w(x,\theta,z,t) = w_0(x,\theta,t) \qquad (۳)$$

u,v,w اجزای جابجایی در امتداد جهات x ، θ و z هستند، در حالی که u_0, v_0, w_0 اجزای جابجایی در نقطه‌ای هستند که در سطح میانی پوسته استوانه‌ای قرار دارند و نمادهای $\phi_x(x,\theta,t)$، $\phi_\theta(x,\theta,t)$ به ترتیب چرخش‌های عرضی نرمال به سطح وسط پوسته استوانه‌ای حول محورθ و x می‌باشند[۱].

برایند گشتاورها و نیروها با ادغام مولفه‌های تنش در جهت z ارائه می‌شود [۳]:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{bmatrix} dz; \begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{bmatrix} zdz; \begin{Bmatrix} Q_\theta \\ Q_x \end{Bmatrix} = K_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \tau_{\theta z} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} dz; \qquad (۴)$$

که $K_s = 5/6$ ضریب تصحیح برش می‌باشد و توسط معادله انتگرال (۴) در امتداد ضخامت [۱]، می‌توان موارد زیر را داشت:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \\ Q_\theta \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_s A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_s A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \\ k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \\ \gamma_{\theta z}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}; \qquad (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C_{ij}(1, z, z^2)dz \tag{۵}$$

با فرض تک محوری بودن تقویت کننده‌ها در حالت تنش، نتایج نیرو و ممان پوسته استوانه‌ای FG مطابق روابط زیر به دست آمد[۲و۱].

$$\begin{aligned} N_x &= (\bar{A}_{11} + \frac{E_s A_s}{s_s})\varepsilon_x^0 + \bar{A}_{12}\varepsilon_\theta^0 + (\bar{B}_{11} + \frac{E_s A_s z_s}{s_s})k_x + \bar{B}_{12}k_\theta \\ N_\theta &= \bar{A}_{12}\varepsilon_x^0 + (\bar{A}_{22} + \frac{E_r A_r}{s_r})\varepsilon_\theta^0 + \bar{B}_{12}k_x + (\bar{B}_{22} + \frac{E_r A_r z_r}{s_r})k_\theta \\ N_{x\theta} &= \bar{A}_{66}\gamma_{x\theta}^0 + \bar{B}_{66}k_{x\theta} \\ Q_\theta &= k_s(\bar{A}_{44} + \frac{G_r A_r}{s_r})\gamma_{\theta z}, \qquad Q_x = k_s(\bar{A}_{55} + \frac{G_s A_s}{s_s})\gamma_{xz} \\ M_x &= (\bar{B}_{11} + \frac{E_s A_s z_s}{s_s})\varepsilon_x^0 + \bar{B}_{12}\varepsilon_\theta^0 + (\bar{D}_{11} + \frac{E_s I_s}{s_s})k_x + \bar{D}_{12}k_\theta \\ M_\theta &= \bar{B}_{12}\varepsilon_x^0 + (\bar{B}_{22} + \frac{E_r A_r z_r}{s_r})\varepsilon_\theta^0 + \bar{D}_{12}k_x + (\bar{D}_{22} + \frac{E_r I_r}{s_r})k_\theta \\ M_{x\theta} &= \bar{B}_{66}\gamma_{x\theta}^0 + \bar{D}_{66}k_{x\theta} \end{aligned} \tag{۶}$$

با توجه به رابطه (۲۲)، E_s, G_s و E_r, G_r به ترتیب نشان دهنده مدول الاستیک و برشی استرینگر و رینگ هستند. پارامترهای h_s, b_s, A_s و h_r, b_r, A_r به ترتیب ارتفاع، عرض و سطح مقطع استرینگر و رینگ هستند. بعلاوه S_s و S_r نشان‌دهنده فواصل بین استرینگرها و رینگ‌ها هستند، در حالی که z_s و z_r به ترتیب، فاصله‌ای از مرکز استرینگر و رینگ تا سطح میانی پوسته استوانه‌ای FG را نشان می‌دهند. که در آن تمام پارامترها بوسیله رابطه زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} &A_{11} = \bar{A}_{11} + \frac{E_s A_s}{s_s}; A_{12} = \bar{A}_{12}; A_{22} = \bar{A}_{22} + \frac{E_r A_r}{s_r}; A_{44} = \bar{A}_{44} + \frac{G_r A_r}{s_r}; A_{55} = \bar{A}_{55} + \frac{G_s A_s}{s_s}; A_{66} = \bar{A}_{66}; \\ &B_{11} = \bar{B}_{11} + \frac{E_s A_s z_s}{s_s}; B_{12} = \bar{B}_{12}; B_{22} = \bar{B}_{22} + \frac{E_r A_r z_r}{s_r}; B_{66} = \bar{B}_{66} \\ &D_{11} = \bar{D}_{11} + \frac{E_s I_s}{s_s}; D_{12} = \bar{D}_{12}; D_{22} = \bar{D}_{22} + \frac{E_r I_r}{s_r}; D_{66} = \bar{D}_{66} \end{aligned} \tag{۷}$$

برای ایجاد معادلات حاکم بر حرکت پوسته استوانه‌ای تقویت شده FG که روی بستر الاستیک قرار دارد، از اصل همیلتون استفاده می‌شود:

$$\int_0^t (\delta K - \delta U - \delta W_e - \delta W_f)dt = 0 \tag{۸}$$

که K انرژی جنبشی ساختار پوسته، U انرژی کرنش، W_e کار نیروی خارجی و W_f کار انجام شده توسط بستر می باشد. انرژی جنبشی ناشی از جابجایی برای یک پوسته استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta K = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_{eq}(z)(\ddot{u}\delta u + \ddot{v}\delta v + \ddot{w}\delta w)dzRd\theta dx; \qquad \rho_{eq} = \rho_{(z)} + (\frac{A_s}{S_s h})\rho_s + (\frac{A_r}{S_r h})\rho_r \tag{۹}$$

همچنین انرژی کرنش برای پوسته استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود[۳]:

$$U = \frac{1}{2}\int_s \begin{bmatrix} N_x\varepsilon_x^0 + N_\theta\varepsilon_\theta^0 + N_{x\theta}\gamma_{x\theta}^0 + \\ M_x k_x + M_\theta k_\theta + M_{x\theta}k_{x\theta} + Q_\theta\gamma_{\theta z} + Q_x\gamma_{xz} \end{bmatrix} Rd\theta dx = \int \begin{pmatrix} \left((d_3Q)^T A^T + (d_4Q)^T B^T\right)(d_3\delta Q) + \\ \left((d_3Q)^T B^T + (d_4Q)^T D^T\right)(d_4\delta Q) + (d_2Q)^T e^T (d_2\delta Q) \end{pmatrix} Rdxd\theta \tag{۱۰}$$

با استفاده از معادله (۹) و (۱۰) در اصل همیلتون، داریم:

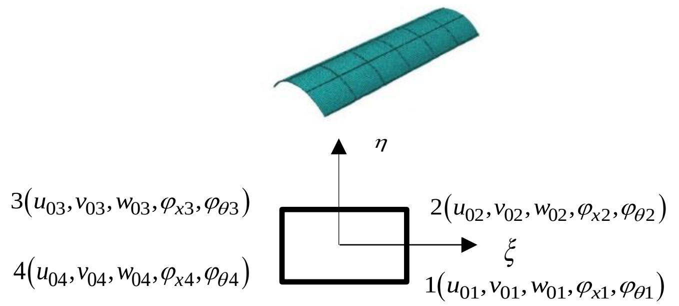
$$\int_{t_1}^{t2} \left[\int_\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho eq \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}\right)(\delta u_0 + z\partial\phi_x) + \\ \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + z\frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial t^2}\right)(\delta v_0 + z\partial\phi_\theta) + \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}\delta w_0 \end{pmatrix} dzd\theta + \int_{S^{(e)}} \begin{pmatrix} \left((d3Q)^T A^T + (d4Q)^T B^T\right) d3\delta Q + \\ \left((d3Q)^T B^T + (d4Q)^T D^T\right) d4\delta Q + \\ (d2Q)^T e^T d2\delta Q \end{pmatrix} Rd\theta dx - \delta We - \delta Wf \right] dt = 0 \tag{۱۱}$$

معادلات δWe و δW_f به شرح زیر هستند:

$$\delta W_e = \int p_z \delta w_0 R d\theta dx; \qquad W_f = \frac{1}{2}\int_s \left[k_w w_0^2 \right] R d\theta dx \tag{۱۲}$$

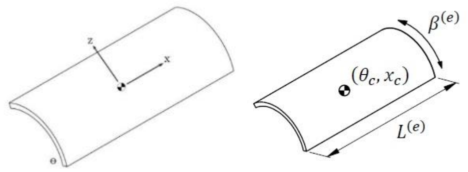
۴. فرم المان محدود معادلات حاکم

برای حل معادلات حاکم بر پوسته تقویت شده استوانه‌ای FG از روش المان محدود استفاده می‌شود. یک عنصر ۲ بعدی ۴ گره با ۲۰ درجه آزادی برای مش بندی دامنه راه حل اعمال شد (شکل ۲). همچنین، یک سیستم مختصات محلی(ξ,η) برای بیان توابع شکل استفاده می‌شود.



شکل ۲. شماتیک مختصات جهانی و پوسته تقویت شده استوانه‌ایFG مشبک [۳]

رابطه بین مولفه‌های سیستم مختصات محلی و جهانی، مطابق شکل ۲ و ۳ به شرح زیر است:



شکل ۳. سیستم مختصات محلی المان پوسته استوانه‌ای

که $-1 \le \xi$, $\eta \le 1$ به ترتیب در جهت x و θ فرض می‌شوند. $\beta(e)$ زاویه چرخش المان و (θ_c, x_c) مختصات محیطی مرکز المان است. توابع شکل در مختصات محلی و بردار جابجایی المان به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} (1+\xi)(1-\eta) \\ (1+\xi)(1+\eta) \\ (1-\xi)(1+\eta) \\ (1-\xi)(1-\eta) \end{Bmatrix}; \qquad \xi = \frac{2(x-x_c)}{L^{(e)}} \quad , \qquad \eta = \frac{2(\theta-\theta_c)}{\beta^{(e)}} \tag{۱۳}$$

با توجه به استفاده از تئوری برشی مرتبه اول، برای هر گره دارای ۵ درجه آزادی در نظر گرفته شد (شکل ۲) و بردار جابجایی المانی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q^{(e)} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \\ w_{01} \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{\theta 1} \\ \vdots \\ u_{04} \\ v_{04} \\ w_{04} \\ \varphi_{x4} \\ \varphi_{\theta 4} \end{Bmatrix} = \psi q^{(e)} \tag{۱۴}$$

که در آن ψ_i ، i=1,2,3,4 توابع شکل و ψ ماتریس توابع شکل هستند. $u_{0i}, v_{0i}, w_{0i}, \varphi_{xi}$ و $\varphi_{\theta i}$ درجات آزادی گره هستند و به صورت تقریبی برابر است با:

$$u_0 = \sum_{i=1}^4 \psi_i u_{0i}; \quad v_0 = \sum_{i=1}^4 \psi_i v_{0i}; \quad w_0 = \sum_{i=1}^4 \psi_i w_{0i}; \; \varphi_\theta = \sum_{i=1}^4 \psi_i \theta_{\theta i}; \; \varphi_x = \sum_{i=1}^4 \psi_i \theta_{xi} \tag{۱۵}$$

جایگزینی معادله (۱۵) در معادله(۱۱) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\int_{S^{(e)}}\left[\left(\left((d_3\psi)^T A^T d_3\psi+(d_4\psi)^T B^T d_3\psi+(d_3\psi)^T B^T d_4\psi+(d_4\psi)^T D^T d_4\psi+(d_2\psi)^T e^T d_2\psi\right)q^{(e)}+\psi^T I\psi\ddot{q}^{(e)}\right]Rdxd\theta-\delta W_e-\delta W_f=0 \quad (۱۶)$$

کار نیروی خارجی نیز برابر است با:

$$\delta W_e=\delta q^{(e)^T}\psi^T\bar{P} \quad (۱۷)$$

که در آن با توجه به نیروی عرضی وارد بر پوسته استوانه‌ای، خواهیم داشت:

$$\bar{P}=\begin{bmatrix}0 & 0 & P_z & 0 & 0\end{bmatrix}^T \quad (۱۸)$$

$$\{d_2\psi=B_2;\qquad d_3\psi=B_3;\qquad d_4\psi=B_4 \quad (۱۹)$$

علاوه بر این، کار بستر ناپایستار عبارت است از:

$$\delta W_f=\int_S k_w w_0\delta w_0 Rd\theta dx=\delta q^{(e)^T}\left(\int_{S^{(e)}}k_w\bar{\psi}^T\bar{\psi}Rd\theta dx\right)q^{(e)} \quad (۲۰)$$

در معادله (۲۰)، کار مجازی بستر الاستیک می‌باشد. با مرتب‌سازی معادله (۱۶)، معادله زیر برای هر المان پوسته استوانه‌ای به دست آمد:

$$M^{(e)}\ddot{q}^{(e)}+(k_1+k_2+k_3+k_4)^{(e)}q^{(e)}=F^{(e)} \quad (۲۱)$$

در نهایت، با اضافه کردن ترم‌های سفتی، جرم و مقادیر ماتریس نیرو، معادلات اجزای محدود پوسته تقویت شده FG استوانه‌ای به صورت زیر بدست می‌آید:

$$M\ddot{q}+(k_1+k_2+k_3+k_4)q=F \quad (۲۲)$$

که در آن K_4 ماتریس سفتی به دلیل خواص کشسانی بستر می‌باشد. ماتریس‌های جرم، سفتی و نیرو در زیر آورده شده است.

$$\begin{aligned}
&M^e=\int_{S^{(e)}}\psi^T I\psi Rdxd\theta;\qquad k_1^{(e)}=\int_{S^{(e)}}\left[(B_3)^T A^T+(B_4)^T B^T\right]B_3Rdxd\theta;\\
&k_2^{(e)}=\int_{S^{(e)}}\left[(B_3)^T B^T+(B_4)^T D^T\right]B_4Rdxd\theta;\quad k_3^{(e)}=\int_{S^{(e)}}\left[(B_2)^T e^T d_2\psi\right]Rdxd\theta;\\
&k_4^{(e)}=\int_{S^{(e)}}k_w\bar{\psi}^T\bar{\psi}Rdxd\theta;\qquad F^{(e)}=\int_{S^{(e)}}\psi^T\bar{P}Rdxd\theta
\end{aligned} \quad (۲۳)$$

سه نوع مختلف شرایط مرزی ضروری در هر دو انتهای پوسته استوانه‌ای $(x = 0, L)$ به شرح زیر است [۱]:

$$\text{(CC)}:\quad u_0=v_0=w_0=\varphi_x=\varphi_\theta=0|_{x=0,L} \quad (۲۴)$$

$$\text{(SS)}:\quad v_0=w_0=\varphi_\theta=N_x=M_x=0|_{x=0,L} \quad (۲۵)$$

$$\text{CS)}:\quad u_0=v_0=w_0=\varphi_x=\varphi_\theta=0|_{x=0,L};\qquad v_0=w_0=\varphi_\theta=N_x=M_x=0|_{x=0,L} \quad (۲۶)$$

روش یکپارچه نیومارک با توجه به زمان[۴] برای حل معادله (۲۲) استفاده می‌شود. تحلیل فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای FG تقویت شده به یک مسئله مقدار ویژه تبدیل می‌شود که ω فرکانس طبیعی دایره‌ای و q، شکل‌های مود ارتعاش می‌باشد.

$$((k_1+k_2+k_3+k_4)-M\omega^2)q=0 \quad (۲۷)$$

۵. اعتبار سنجی مدل

برای مدلسازیFE، پارامترهای هندسی از مرجع [۱و۲] برای شبیه‌سازی پوسته تقویت شده FG ، به منظور تجزیه و تحلیل فرکانس های طبیعی استفاده می‌شود. جدول ۱ مشخصات مواد پوسته تقویت شده FG مورد استفاده را نشان می‌دهد [۱و۲].

جدول ۱. مشخصات هندسی و مواد تقویت کننده‌ها [۱]

خواص مواد سیلندر تقویت شده		ویژگی‌های هندسی تقویت کننده‌ها		
مقدار	مشخصات	رینگ ها	استرینگرها	نوع تقویت کننده‌ها
۲۰۰	$E_0(Gpa)$	۵	۱۰	تعداد تقویت کننده‌ها

۰/۳	υ_o	۰/۰۱۲	۰/۰۱۲	ارتفاع تقویت کننده‌ها (متر)
۵۷۰۰	ρ_o (kg/m^3)	۰/۰۰۲	۰/۰۰۲	عرض تقویت کننده‌ها (متر)
۷۰	E_i (*Gpa*)	مشخصات هندسی سیلندر		
۰/۳	υ_i	ضخامت (متر)	طول (متر)	شعاع (متر)
۲۷۰۲	ρ_i (*kg/m^3*)	۰/۰۰۲	۱	۰/۲

پس از انجام تحلیل فرکانس با شرایط ذکر شده، نتایج آنالیز به همراه مقادیر مرجع [۱] در جدول ۲ فهرست شده است. در این جدول دو حالت آنالیز (با/بدون تقویت کننده) ارائه شده است. همانطور که در این جدول مشخص شده است، فرکانس‌های طبیعی برای پوسته FG شامل شاخص کسر حجمی، به ترتیب ضریب ۲/۴% و ۳/۶۵% برای پوسته‌های تقویت شده و تقویت نشده افزایش می یابد. همچنین به این نتیجه رسیدیم که مدل اجزای محدود مورد استفاده در این مطالعه با مقایسه نتایج به‌دست آمده مرجع [۱] معتبر می‌باشد. ابعاد تقویت کننده‌ها کوچک است، اما همانطور که در جدول ۲ نشان داده شده است، اختلاف زیادی میان فرکانس طبیعی حالت با و بدون تقویت کننده بر اساس این مطالعه و مرجع [۱] وجود دارد.

جدول ۲. مقایسه فرکانس طبیعی مدل المان محدود و رفرنس [۱]

شرایط‌ها	تقویت شده	تقویت نشده
مرجع [۱]	۳۴۴/۹۰	۱۹۳/۸۷
کارحاضر	۳۵۳/۱۹	۲۰۰/۹۵
اختلاف(%)	۲/۴۰	۳/۶۵

همچنین برای اعتبارسنجی مدل، پارامتر دیگری مانند ضریب الاستیک در بستر الاستیک در نظر گرفته شده است. بنابراین، نتایج به‌دست‌آمده از مدل تشکیل‌شده با نتایج مطالعه شده در مرجع [۲] مقایسه شده است. در این تحقیق مدل‌های هندسی مختلف مانند مدل هندسی R6 با مشخصات هندسی ذکر شده در جدول ۳ مورد تحلیل و اعتبارسنجی قرار گرفت. در این مدل، Al/ZrO2 به عنوان ماده پوسته استوانه‌ای FG انتخاب شده است.

جدول ۳. خواص هندسی و مواد برای ساختار پوسته استوانه‌ای FG تقویت شده [۲]

۰/۳	υ_o	رینگ ها / استرینگرهای عمودی	نوع تقویت کننده‌ها
۵۷۰۰	ρ_o (*kg/m^3*)	R6	مدل
۲۰۰	E_1 (*Gpa*)	۵/۱۰	تعداد تقویت کننده‌ها
۰/۳	υ_1	۰/۲	شعاع (متر)
۵۷۰۰	ρ_1 (*kg/m^3*)	۰/۰۰۲	ضخامت (متر)
۷۰	E_2 (*Gpa*)	۱	طول (متر)
۰/۳	υ_2	۰/۰۰۶ / ۰/۰۰۶	ارتفاع تقویت کننده‌ها (متر)
۲۷۰۲	ρ_2 (*kg/m^3*)	۰/۰۰۲ / ۰/۰۰۲	عرض تقویت کننده‌ها (متر)
خارجی	نوع تقویت کننده	۲۰۰	E_0(*Gpa*)

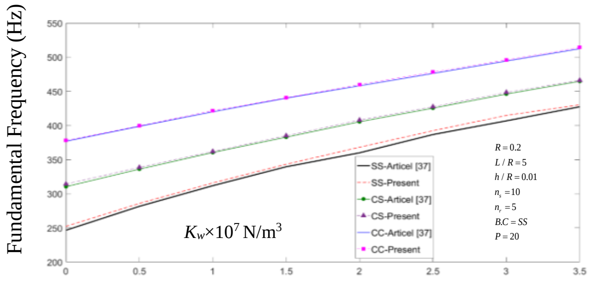
در تحقیق حاضر، نتایج به دست آمده برای تحلیل دینامیکی و مقایسه آن با مرجع [۲] در شکل ۴ نشان داده شده است. با توجه به تحلیل دینامیکی، شکل مد فرکانس‌های طبیعی به دست آمده در روش اجزای محدود به صورت جدول ۴ نشان داده شده است. حداکثر اختلاف بین فرکانس‌های طبیعی مطالعه حاضر با مرجع [۲]، ۲/۳۱% است. روابط حاکم برای مدل اجزای محدود در بستر الاستیک که با روش‌های ریاضی و عددی حل شده، نتیجه قابل قبولی را نشان می‌دهد. اثر K_w بر فرکانس طبیعی در حالت مذکور و شرایط مرزی مشخص شده قابل مشاهده است. با افزایش ضریب بستر الاستیک، مقدار فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد و این نتایج، تطابق خوبی با بستر الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده دارد.

جدول ۴. مقایسه فرکانس‌های طبیعی با ضریب الاستیک متفاوت در بستر الاستیک و شرایط مرزی مختلف پوسته FG با مرجع[۲]

اختلاف (%)	کارحاضر شرایط مرزی = CS	مرجع [۲] شرایط مرزی= CS	$K_w\times10^7$
۱/۲۴	۳۱۴/۲۶	۳۱۰/۳۹	۰
۰/۷۸	۳۳۸/۶۵	۳۳۶/۰۲	۰/۵
۰/۴۳	۳۶۱/۹۸	۳۶۰/۳۹	۱
۰/۵۵	۳۸۵/۰۱	۳۸۲/۸۸	۱/۵
۰/۶۱	۴۰۷/۸۶	۴۰۵/۳۷	۲
۰/۴۸	۴۲۷/۴۱	۴۲۵/۳۵	۲/۵
۰/۵۶	۴۴۸/۴۷	۴۴۵/۹۶	۳
۰/۳۰	۴۶۶/۱۱	۴۶۴/۶۹	۳/۵

اختلاف (%)	کارحاضر شرایط مرزی = SS	مرجع [۲] شرایط مرزی= SS	$K_w\times10^7$
۲/۳۱	۲۵۲/۲۹	۲۴۶/۵۷	۰
۱/۵۱	۲۸۵/۸۷	۲۸۱/۶۰	۰/۵
۱/۲۹	۳۱۵/۸۹	۳۱۱/۸۴	۱
۱/۱۰	۳۴۳/۲۸	۳۳۹/۵۳	۱/۵
۲/۲۵	۳۶۸/۱	۳۵۹/۹۸	۲
۱/۴۵	۳۹۲/۳۵	۳۸۶/۷۴	۲/۵
۱/۹۵	۴۱۴/۷	۴۰۶/۷۵	۳
۰/۶۸	۴۳۰/۳۳	۴۲۷/۳۹	۳/۵

اختلاف (%)	کارحاضر شرایط مرزی = CC	مرجع [۲] شرایط مرزی = CC	$K_w\times10^7$
۰/۲۹	۳۷۸/۰۱	۳۷۶/۸۸	۰
۰/۱۸	۳۹۹/۴۷	۳۹۸/۷۴	۰/۵
۰/۴۱	۴۲۱/۷۱	۴۱۹/۹۸	۱
۰/۱۲	۴۴۰/۴۹	۴۳۹/۹۶	۱/۵
۰/۴۰	۴۵۹/۹۱	۴۵۸/۰۶	۲
۰/۴۳	۴۷۸/۲۵	۴۷۶/۱۶	۲/۵
۰/۳۵	۴۹۵/۹۹	۴۹۴/۲۶	۳
۰/۳۷	۵۱۴/۲۷	۵۱۲/۳۶	۳/۵



شکل ۴. مقایسه مدل المان محدود و مرجع [۲] با مقادیر مختلف بستر الاستیک

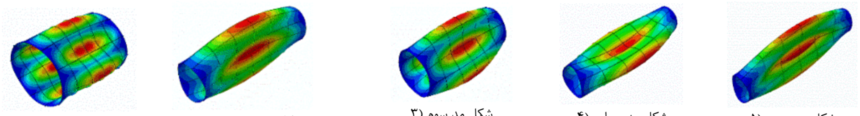
۶. مقایسه FE و نتایج تحلیلی

به منظور اعتبارسنجی نتایج فرکانس طبیعی مدلسازیFE ، از روش سطح پاسخ تحلیلی RSM و پارامترهای مربوط به مرجع[۱و۲] برای مدل‌سازی در نرم افزار FE استفاده می‌شوند. پارامترهای هندسی ثابت و متغیر به عنوان ورودی به DOE برای روش تحلیلی ارائه می‌شوند.

جدول ۵. پارامترهای متغیر و ثابت

پارامترهای ثابت		پارامترهای متغیر	
مقدار	**پارامتر**	**بازه تغییر**	**پارامتر**
۲۰۰	شعاع (mm)	۰-۵-۱۰-۱۵-۲۰ (٪)	شاخص کسر حجمی (p)
۵	تعداد رینگ‌ها (n_r)	۵۰۰-۱۰۰۰-۱۵۰۰-۲۰۰۰-۲۵۰۰	طول (mm)
۱۰	تعداد استرینگرها (n_S)	۰/۵-۱/۰-۱/۵-۲/۰-۲/۵	ضخامت (mm)
۶	ارتفاع تقویت کننده‌ها h_s (mm)	۰-۱-۲-۳-۴	ضریب بستر الاستیک $(10^7\ N/m^3)$
۲	عرض تقویت کننده‌ها w_s (mm)	SS – CC – CS	شرایط مرزی $(B.C)$

شکل ۵، شکل مود پوسته استوانه‌ای را در مقادیر مختلف طول آن و مقدار فرکانس طبیعی به صورت جدول ۶ را نشان می‌دهد.



۱) شکل مد اول ω_n=646.66 Hz — ۲) شکل مد دوم ω_n=391.15 Hz — ۳) شکل مد سوم ω_n=334.67 Hz — ۴) شکل مد چهارم ωn=309.16 Hz — ۵) شکل مد پنجم ωn=248.41 Hz

شکل ۵. پنج مود فرکانسی اول پوسته استوانه‌ای با مقادیر متفاوت طول را نشان می دهد. ($p=10$, $h=1.5mm$, $B.C=SS$, $K_w=2e7N/m^3$)

جدول ۶. شماره‌های مود و فرکانس‌های طبیعی با شرایط مرزی مختلف($p=10$, $h=1.5mm$, $B.C=SS$, $K_w=2e7N/m^3$)

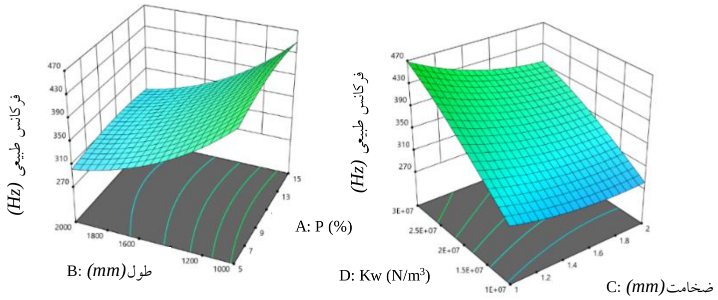
فرکانس طبیعی (Hz) شرایط مرزی : CC	طول (mm)	شماره	فرکانس طبیعی (Hz) شرایط مرزی : CS	طول (mm)	شماره	فرکانس طبیعی (Hz) شرایط مرزی : SS	طول (mm)	شماره
۷۴۰/۲۹	۵۰۰	۱	۶۹۷/۴۸	۵۰۰	۱	۶۴۶/۶۶	۵۰۰	۱

۲	۱۰۰۰	۳۹۱/۱۵	۲	۱۰۰۰	۴۴۰/۱۴	۲	۱۰۰۰	۴۸۷/۹۹
۳	۱۵۰۰	۳۳۴/۶۷	۳	۱۵۰۰	۳۸۹/۶۳	۳	۱۵۰۰	۴۳۶/۲۸
۴	۲۰۰۰	۳۰۹/۱۶	۴	۲۰۰۰	۳۵۶/۹۷	۴	۲۰۰۰	۴۰۸/۹۶
۵	۲۵۰۰	۲۴۸/۴۱	۵	۲۵۰۰	۲۹۸/۰۱	۵	۲۵۰۰	۳۴۲/۸۹

با افزایش طول پوسته استوانه‌ای و افزودن شرایط مرزی مختلف در جدول ۶، سفتی کاهش یافته و جرم افزایش یابد و در نتیجه، فرکانس طبیعی بر اساس نسبت $\sqrt{(k/M)}$ کاهش می‌یابد.

جدول ۷. مقایسه فرکانس‌های طبیعی برای مدل سازی تحلیلی و FE

مدها	المان محدود	دیزاین اکسپرت(تحلیلی)	اختلاف (٪)
(۱،۱)	۶۴۶/۶۶	۶۴۴/۰۹	۰/۳۹
(۱،۲)	۳۹۱/۱۵	۳۸۸/۵۹	۰/۶۵
(۱،۳)	۳۳۴/۶۷	۳۳۱/۷۸	۰/۸۷
(۱،۴)	۳۰۹/۱۶	۳۰۳/۷۴	۱/۷۸
(۱،۵)	۲۴۸/۴۱	۲۴۵/۳۳	۱/۲۵



شکل ۶. اثر متقابل شاخص کسر حجمی و طول پوسته استوانه‌ای بر مقدار فرکانس‌های طبیعی(شکل چپ) و تأثیر متقابل ضریب بستر الاستیک و ضخامت پوسته استوانه‌ای روی مقدار فرکانس‌های طبیعی(شکل راست)

مقایسه‌ای بین نتایج به دست آمده از FEM و حل تحلیلی انجام شده است (جدول ۸). در پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده FG، بهترین حالت، کاهش یا ثابت نگه داشتن وزن سازه و همچنین به حداکثر رساندن فرکانس طبیعی است. شکل ۸ فرکانس طبیعی بدست آمده از مدل بهینه شده در FEM را نشان می‌دهد.

جدول ۸. مقایسه نتایج بدست آمده از حداکثر مقدار فرکانس طبیعی

اختلاف (%)	المان محدود (Hz)	حل تحلیلی (Hz)	ضخامت (mm)	طول (mm)	شاخص کسر حجمی (p)
۳/۶۳	۸۰۰/۶۴	۸۲۹/۷۳	۰/۵	۵۰۰	۱۰

۷. نتیجه‌گیری

مقایسه حل تحلیلی و FEM انجام شده و نتایج خوبی بدست آمده است. یافته‌ها و اظهارات مهم زیر را می‌توان بیان کرد:

- همانطور که گفته شد، با افزایش طول پوسته استوانه‌ای تقویت شده FG، مقدار فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد.
- پارامترهای شاخص کسر حجمی و طول به ترتیب کمترین و بیشترین تأثیر را روی مقدار فرکانس‌های طبیعی سازه دارند.
- به دلیل تأثیر متقابل دو پارامتر به طور همزمان، با ثابت ماندن شاخص کسر حجمی و افزایش طول پوسته استوانه‌ای، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد. علاوه بر این، با ثابت ماندن ضخامت پوسته استوانه‌ای، با افزایش ضریب بستر الاستیک، فرکانس‌های طبیعی سازه افزایش می‌یابد.
- مقایسه بین فرکانس‌های طبیعی روش FEM و تحلیلی تفاوت % ۳/۶۳ را بیان می‌کند که حل آن تطابق خوبی می‌باشد.
- همانطور که قبلا ذکر شد، برای رسیدن به هدف طراحی پوسته استوانه‌ای تقویت شده FG با پارامترهای هندسی پوسته جهت رسیدن به بهترین حالت ممکن، باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی می‌شود.

مراجع

1. Tran, M. T., et al.: Free vibration of stiffened functionally graded circular cylindrical shell resting on Winkler–Pasternak foundation with different boundary conditions under thermal environment. *Acta mechanica*, 231, 2545-2564. (2020)
2. Nguyen, V. L., Hoang, T. P.: Analytical solution for free vibration of stiffened functionally graded cylindrical shell structure resting on elastic foundation. *SN Applied Sciences*, 1(10), 1150 (2019)
3. Babaei, M., Asemi, K.: Static, dynamic and natural frequency analyses of functionally graded carbon nanotube annular sector plates resting on viscoelastic foundation. *SN Applied Sciences*, 2, 1-21 (2020)
4. Zienkiewicz, O. C., et al.: The finite element method: its basis and fundamentals. Elsevier. (2005)
5. Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S.: Theory of plates and shells (Vol. 2, pp. 240-246). New York: McGraw-hill. (1959)