



ISAV2024

چهاردهمین کنفرانس بین المللی آکوستیک و ارتعاشات

۲۱ و ۲۲ آذر ماه ۱۴۰۳ کرج - ایران



ارتعاشات آزاد شفت تیموشنکوی کامپوزیتی غیرخطی دوار

حسین بیرانوند^۱، سید علی اصغر حسینی^۲

^۱ایران، تهران، خیابان شهید مفتاح نرسیده به انقلاب، دانشگاه خوارزمی، فنی مهندسی، ۱۴۹۱۱-۱۵۷۱۹، دانش آموخته کارشناسی ارشد،

^۲ایران، تهران، خیابان شهید مفتاح نرسیده به انقلاب، دانشگاه خوارزمی، ۱۴۹۱۱-۱۵۷۱۹، استاد.

*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: Ali.Hosseini@khu.ac.ir

چکیده

در این مطالعه، با استفاده از رویکرد هندسه دقیق، یک دسته معادلات غیرخطی حرکت برای شفت‌های کامپوزیتی تیموشنکو استخراج شده است. پس از گسسته‌سازی معادلات، نهایتاً ارتعاشات آزاد یک شفت ارتوتروپیک با شرایط مرزی دوسر مفصل مورد بررسی قرار گرفت. لازم به ذکر است حل معادلات غیرخطی حرکت با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه تئوری اغتشاشات انجام شد. پس از بررسی‌های متعدد مشخص شد در موردی که معادلات با استفاده از دو مود گسسته‌سازی شده‌اند، کوپلینگ‌های ایجاد شده توسط ماده کامپوزیتی، اثرات خطی و غیرخطی قابل توجهی روی پاسخ شفت خواهند داشت که این اثرات در مدل‌های کلاسیک قابل پیش‌بینی نیستند. همچنین در بررسی لایه‌چینی ماده کامپوزیتی مشخص شد که اثر زاویه‌ی الیاف همانند کوپلینگ‌های کامپوزیت قابل توجه بوده و این اثرات در لایه‌چینی نامتقارن بزرگ‌تر خواهند بود.

کلمات کلیدی: شفت کامپوزیتی غیرخطی؛ تیر تیموشنکو؛ ارتعاشات آزاد؛ تئوری اغتشاشات.

۱- مقدمه

شفت‌ها المان‌های بنیادینی هستند که نقش مهمی در عملکرد ماشین‌آلات مکانیکی و الکتریکی ایفا می‌کنند. ماشین‌آلات دوار مانند ماشین‌ابزارها، توربوجت و توربوفن‌ها، توربین‌های تولید توان و ژنراتورها و همچنین الکتروموتورها نمونه‌های کمی از هزاران کاربردی هستند که شفت‌ها در ماشین‌آلات دارند.

یکی از بزرگ‌ترین یافته‌های مهندسی در قرن اخیر، مواد کامپوزیتی می‌باشند. مزیت استفاده از این مواد آن است که می‌توانند برای کاربردهای خاص طراحی و ساخته شوند. از مشخصه‌های اصلی مواد کامپوزیتی می‌توان به چگالی بسیار پایین، استحکام بسیار بالا، مقاومت به شوک و حرارت، خواص ارتعاشی بهینه، ساخت ارزان و قابلیت تعمیر و نگهداری اشاره نمود.

بنابراین طیف زیادی از کاربردهای این مواد در تولیدات مهندسی را می‌توان پیدا نمود. به خاطر همین خواص ویژه‌ی مواد کامپوزیتی، امروزه بسیاری از قطعات خاص مانند ملخ‌های هلیکوپترها، شفت‌های بزرگ و سبک موتورهای الکتریکی و جت، مته‌های حفاری، بدنه ماهواره‌برهای بزرگ و... با استفاده از این مواد ساخته می‌شوند. از آنجایی که مدل‌سازی و تحلیل سازه‌های فوق برای طراحی دقیق و بهینه آن‌ها بسیار مهم است، مطالعه در خصوص شفت‌های کامپوزیتی بسیار بجا و کاربردی خواهد بود.

در ساخت سازه‌های کامپوزیتی الیاف با استفاده از زوایای مختلفی کار گذاشته می‌شوند؛ این موضوع سبب می‌شود کویلینگ‌هایی بین خواص مواد در راستاهای مختلف ایجاد شود. بنابراین مدل‌سازی و تحلیل چنین موادی بسیار پیچیده‌تر از مواد همگن بوده و نیازمند تئوری‌های پیچیده و کامل‌تری می‌باشد. در سال‌های اخیر کارهای ارزشمندی در خصوص مدل‌سازی و تحلیل این مواد انجام شده که در ادامه به اختصار به آن‌ها اشاره می‌شود.

چانگ و همکارانش [۱] با استفاده از تئوری تیر برشی مرتبه اول یک مدل ساده خطی برای شفت‌های کامپوزیتی ارائه نمودند. آن‌ها تغییر شکل برشی، اینرسی دورانی، اثرات ژيروسکوپی و کویلینگ‌های ناشی از لایه‌چینی را در معادلات منظور نمودند. برنجی و سو [۲] ماتریس سفتی دینامیکی یک تیر کامپوزیتی چرخان را توسعه داده و مسئله‌ی ارتعاش آزاد آن را بررسی کردند. لی و همکاران [۳] یک تیر جدار نازک کامپوزیتی چرخان خطی را تحت تاثیر رطوبت و گرما مدل‌سازی کردند. آن‌ها اثر پارامترهای مختلف را روی پاسخ سیستم مورد مطالعه و بحث قرار دادند.

هاجز [۴] و [۵] یک فرمول‌بندی هندسه دقیق برای دینامیک غیرخطی تیرهای کامپوزیتی ارائه نمود. در آن کار، معادلات حرکت هندسه دقیق بدون هیچ‌گونه تقریب هندسی استخراج شده‌اند. کافی و حسینی [۶] دینامیک ناپایای غیرخطی شفت کامپوزیتی دوار در هنگام گذر از سرعت بحرانی را با استفاده از روش مجانبی مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها بیان کردند که زاویه لایه‌چینی الیاف یک عامل تاثیرگذار روی پاسخ شفت در نواحی تشدید و نواحی بعد از رزونانس می‌باشد. همچنین کافی و حسینی [۷] ارتعاش غیرخطی ناپایای یک شفت کامپوزیتی دوار را که از سرعت بحرانی عبور می‌کند و توسط یک منبع انرژی غیر ایده‌آل برانگیخته می‌شود، مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها نشان دادند که ترم‌های غیرخطی و کویلینگ کامپوزیتی، تأثیر معنی‌داری روی پدیده سامرفلد دارند.

چی و همکاران [۸] با استفاده از روش‌هایی مانند تحلیل اجزا محدود، روش تحریک پالس ارتعاشی^۱ و محاسبه‌ی تحلیلی، تأثیر الیاف تقویت‌شده بر ارتعاش شفت‌های کامپوزیتی را بررسی کردند. آن‌ها بیان کردند که افزایش مدول الیاف روشی موثر برای افزایش فرکانس طبیعی شفت است. نا و همکاران [۹] از اصل همیلتون برای استخراج معادله حرکت یک شفت استوانه‌ای مدور که با استفاده از یک تیر کامپوزیتی مخروطی جدار نازک مدل‌سازی شده بود استفاده نموده و در نهایت ارتعاش آزاد خطی و پایداری را بررسی کردند. آن‌ها دریافتند که با مخروطی نمودن هندسه تیر، می‌توان مناطق پایداری و فرکانس‌های طبیعی را به طور قابل توجهی در مقایسه با شفت‌های یکنواخت ساخته شده از همان ماده افزایش داد.

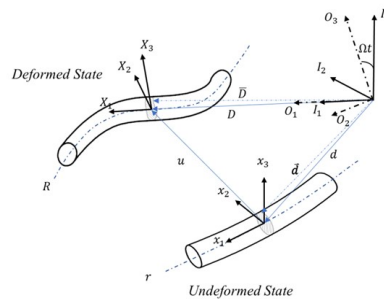
از آنجایی که اغلب شفت‌های کامپوزیتی لاغر هستند، مدل‌سازی خطی آنها نمی‌تواند خیلی کاربردی باشد. به دلیل کوپل شدن خواص مواد در جهات مختلف، پدیده‌های غیرخطی بحرانی‌تر می‌شوند و نه تنها چنین پدیده‌هایی قابل اغماض نیستند، بلکه در نظر گرفتن آن‌ها در طراحی شفت‌های کامپوزیتی بسیار مهم است. همچنین با توجه به این‌که در مواد کامپوزیتی می‌توان لایه‌چینی را در جهات مختلف انجام داد، اثرات برشی می‌توانند نقش مهمی در پاسخ چنین سیستم‌هایی داشته باشند. بنابراین، استفاده از تئوری‌های کلاسیک مانند تئوری‌های تیر اویلر برنولی و ریلی که اثرات برشی در آنها در نظر گرفته نمی‌شود، ممکن است مناسب نباشد. از این‌رو در این مطالعه ما معادلات حرکت غیرخطی هندسه دقیق تیموشنکو را برای شفت‌های کامپوزیتی دوار بر اساس تئوری بیان شده در مرجع [۱۰] استخراج نموده و سپس مسئله‌ی ارتعاش آزاد برای یک شفت کامپوزیتی دوار را با استفاده از روش مقیاس چندگانه مرجع [۱۱] بررسی خواهیم نمود.

^۱ Pulse vibration excitation technique

۲- استخراج معادلات حرکت

۱-۲ پیکربندی شفت و بردارهای اساسی

شفت نمایش داده شده در شکل (۱) را در نظر بگیرید. این شفت به طور ایده‌آل با استفاده از یک تار خنثی و یک سطح مقطع معرفی می‌شود. دستگاه مختصات متعامد I_1, I_2, I_3 یک دستگاه مختصات اینرسی و دستگاه مختصات متعامد $O_1O_2O_3$ یک دستگاه مختصات چرخان است که نسبت به دستگاه مختصات اینرسی دارای سرعت زاویه‌ای Ω است. همچنین $X_1X_2X_3$ دستگاه مختصات محلی مقطع شفت قبل از تغییر شکل و $X_1X_2X_3$ دستگاه مختصات محلی مقطع شفت بعد از تغییر شکل است که در صورت اعوجاج و پیچش شفت می‌تواند یک دستگاه غیرمتعامد باشد. r و R بردارهایی هستند که موقعیت یک نقطه فرضی را به ترتیب قبل و بعد از تغییر شکل روی سطح مقطع شفت نشان می‌دهند. همچنین، u برداری است که بیانگر مجموع جابجایی‌های مقطع شفت می‌باشد.



شکل ۱. پیکربندی شفت قبل و بعد از تغییر شکل

۲-۲ مدل ساختاری

معادله‌ی ساختاری یک لایه ماده کامپوزیتی ارتو تروپیک در جهات مادی اصلی، به صورت زیر قابل بیان می‌باشد [۱]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

در صورتی که زاویه‌ی بین الیاف آن و جهت X دستگاه مختصات استوانه‌ای، η باشد، رابطه تنش- کرنش برای این لایه در سیستم مختصات استوانه‌ای را می‌توان به صورت زیر بیان کرد: [۱]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rr} \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{xr} \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{rr} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{xr} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

رابطه (۲) را می‌توان به فرم $\{\sigma\} = [\bar{Q}]\{\varepsilon\}$ هم بازنویسی نمود که $[\bar{Q}]$ در آن ماتریس سفتی انتقال یافته است که به صورت ذیل قابل محاسبه خواهد بود:

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q] [T]^T \quad (۳)$$

منظور از 'T' در عبارت فوق، ماتریس دوران است. همچنین چگالی انرژی کرنشی برای شفت‌های کامپوزیتی مدور در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر قابل بیان خواهد بود:

$$u = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \int_0^{2\pi} \{\varepsilon\}^T [\bar{Q}] \{\varepsilon\} r d\theta dr, \quad \varepsilon = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{\theta\theta} \quad \varepsilon_{rr} \quad 2\varepsilon_{r\theta} \quad 2\varepsilon_{r0} \quad 2\varepsilon_{x0}]^T \quad (۴)$$

پس از جایگذاری تمامی پارامترهای رابطه‌ی (۴) و تغییر متغیرها، در نهایت چگالی انرژی کرنشی بر حسب کرنش‌های تعمیم یافته یک بعدی به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$u = \frac{\pi}{4} (\kappa_1^2 \bar{Q}_{66} + 1/2 \kappa_2^2 \bar{Q}_{11} + 1/2 \kappa_3^2 \bar{Q}_{11}) (r_{i+1}^4 - r_i^4) + \frac{2\pi}{3} (\gamma_{11} \kappa_1 \bar{Q}_{16} - \gamma_{12} \kappa_2 \bar{Q}_{16} - \gamma_{13} \kappa_3 \bar{Q}_{16}) (r_{i+1}^3 - r_i^3) + \pi/2 (\bar{Q}_{11} \gamma_{11}^2 + 2\bar{Q}_{55} \gamma_{12}^2 + 2\bar{Q}_{66} \gamma_{12}^2 + 2\bar{Q}_{55} \gamma_{13}^2 + 2\bar{Q}_{66} \gamma_{13}^2) (r_{i+1}^2 - r_i^2) \quad (۵)$$

رابطه اخیر را می‌توان به فرم ماتریسی زیر هم بازنویسی نمود.

$$u = \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \kappa \end{matrix} \right\}^T [S] \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \kappa \end{matrix} \right\} \quad (۶)$$

که درایه‌های ماتریس 'S' به صورت زیر قابل محاسبه خواهند بود.

$$S_{25} = -\pi/3 (r_{i+1}^3 - r_i^3) \bar{Q}_{16}, S_{11} = \pi (r_{i+1}^2 - r_i^2) \bar{Q}_{11}, S_{22} = \pi/2 (r_{i+1}^2 - r_i^2) (\bar{Q}_{55} - \bar{Q}_{66}), S_{14} = 2\pi/3 (r_{i+1}^3 - r_i^3) \bar{Q}_{16}, S_{44} = \pi/2 (r_{i+1}^4 - r_i^4) \bar{Q}_{66}, S_{55} = \pi/4 (r_{i+1}^4 - r_i^4) \bar{Q}_{11} \quad (۷)$$

۳-۲ معادلات حرکت

معمولاً به دلیل ساده‌تر شدن فرآیند تحلیل، معادلات حرکت شفت‌های دوار در دستگاه مختصات اینرسی بیان می‌شوند. بنابراین، ابتدا معادلات ذاتی هندسه دقیق بیان شده در مرجع [۱۰] که در دستگاه چرخان بیان شده‌اند را به صورت ذیل در دستگاه اینرسی بیان می‌کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial t} (C^T P) - f^* = \frac{\partial}{\partial x} (C^T F) \quad (۸)$$

$$(\tilde{Y} Y)^T P - \frac{\partial}{\partial t} (Y^T H) + \frac{\partial}{\partial t} (Y^T) H + (\tilde{\omega}^{Bl} Y)^T H + m^* = [(\tilde{e}_1 + \tilde{\gamma}) Y] F - \frac{\partial}{\partial x} (Y^T M) + \frac{\partial}{\partial x} (Y^T) M + (\tilde{K} Y)^T M$$

شرایط مرزی برای این معادلات به صورت زیر خواهند بود:

$$\bar{\delta} u^T C^T F|_0^L = 0, \quad \bar{\delta} \theta^T Y^T M|_0^L = 0 \quad (۹)$$

شایان ذکر است (~) نماد اپراتور ضرب خارجی، (-) نماد مزدوج مختلط، 'P' و 'H' تکانه‌های خطی و زاویه‌ای، 'F' و 'M' به ترتیب نیروها و گشتاورهای داخلی ایجاد شده در شفت، 'K' انحنای شفت، 'f*' و 'm*' نیرو و ممان‌های خارجی اعمالی در واحد

طول، v و $\tilde{\omega}^{BI}$ سرعت‌های خطی و زاویه‌ای دستگاه تغییر شکل یافته X_1, X_2, X_3 در دستگاه اینرسی I_1, I_2, I_3 هستند. همچنین ماتریس‌های C و Y به صورت زیر قابل تعریف خواهند بود:

$$C = \begin{bmatrix} c(\theta)c(\psi) & c(\theta)s(\psi) & -s(\theta) \\ -s(\psi)c(\beta)+s(\beta)s(\theta)c(\psi) & c(\beta)c(\psi)+s(\beta)s(\theta)s(\psi) & s(\beta)c(\theta) \\ s(\beta)s(\psi)+c(\psi)c(\beta)s(\theta) & -c(\psi)s(\beta)+c(\beta)s(\theta)s(\psi) & c(\theta)c(\beta) \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s(\theta) \\ 0 & c(\beta) & c(\theta)s(\beta) \\ 0 & -s(\beta) & c(\theta)c(\beta) \end{bmatrix} \quad (10)$$

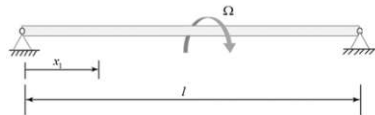
$c(*) = \cos(*)$, $s(*) = \sin(*)$

به منظور جدا نمودن جابجایی‌های پیچشی و حرکت اسپینی فرض می‌کنیم $\beta(x, t) = \phi(x, t) + \Omega t$ باشد. نهایتاً معادلات غیر خطی با جایگذاری تمامی ترم‌های رابطه‌ی (۸) بدست آمده که می‌توان آن‌ها را با استفاده از بسط تیلور تا مرتبه ۳ ساده سازی نمود. نهایتاً معادلات بدون بعد با استفاده از پارامترهای بدون بعد زیر بدست خواهند آمد. لازم به ذکر است از نوشتن فرم صریح معادلات صرف نظر شد.

$$x^* = x/l, u^* = u/l, v^* = v/l, w^* = w/l, t^* = \sqrt{\frac{S_{55}}{ml^4}}t, I_2^* = I_2/(ml^2), \Omega^* = \sqrt{\frac{ml^4}{S_{55}}}\Omega, S_{44}^* = \frac{S_{44}}{S_{55}} \quad (11)$$

$$c_1^* = c_1 \left(l^4 \sqrt{\frac{S_{55}}{ml^4}} \right) / S_{55}, c_2^* = c_2 \left(l^2 \sqrt{\frac{S_{55}}{ml^4}} \right) / S_{55}, S_{11}^* = \frac{l^2 S_{11}}{S_{55}}, S_{22}^* = \frac{l^2 S_{22}}{S_{55}}, S_{25}^* = \frac{l S_{25}}{S_{55}}, S_{14}^* = \frac{l S_{14}}{S_{55}}$$

۳- نتایج عددی



شکل ۲ شرایط مرزی دو سر مفصل برای شفت دوار

حل معادلات حرکت با استفاده از روش مقیاس چندگانه مرجع [۱۱] انجام شد. در ادامه قسمت قصد داریم با بررسی چند مثال عددی به بررسی ارتعاشات آزاد شفت‌های کامپوزیتی بپردازیم. در تمام تحلیل‌ها، از خواص مکانیکی ماده بور-اپوکسی معرفی شده در مرجع [۱] استفاده شد. همچنین لازم به ذکر است در تمامی مثال‌های این بخش از خصوصیات هندسی معرفی شده در جدول (۱) استفاده شده است.

جدول ۱. خواص هندسی شفت

| طول شفت (m) | قطر داخلی (m) | قطر خارجی (m) | ضریب اصلاح برشی |
|-------------|---------------|---------------|-----------------|
| ۱ | ۰،۰۲۸ | ۰،۰۴۸ | ۰،۵۶ |

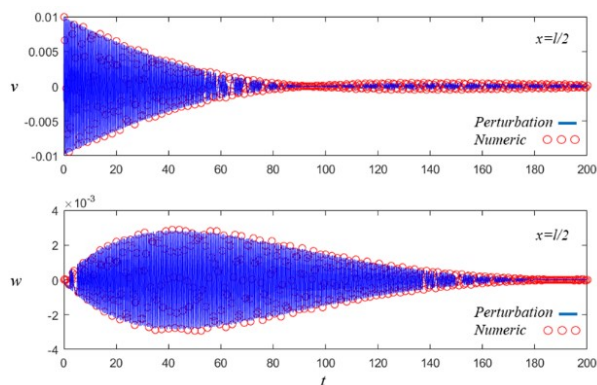
همین‌طور پارامترهای بدون بعد جدول (۲) بر اساس داده‌های جدول (۱)، نوع لایه‌چینی و روابط (۱۱) بدست آمده‌اند. به منظور بررسی بهتر اثرات کوپلینگ مواد کامپوزیت، در مثال‌ها از لایه‌چینی‌های متقارن و نامتقارن استفاده شده است.

جدول ۲. پارامترهای بدون بعد

| زاویه لایه‌چینی | S_{11}^* | S_{22}^* | S_{14}^* | S_{25}^* | S_{44}^* | I_2^* |
|----------------------|------------|------------|------------|------------|------------|----------|
| [۹۰/۴۵/-۴۵/۰/۹۰] | ۴۹۷۷،۷۶۳ | ۹۵۱،۶۱ | -۲،۱۲۹ | ۱،۰۶۴ | ۰،۵۱۳ | ۰،۰۰۰۱۹۳ |
| [۹۰/۲۲،۵/-۲۲،۵/۰/۹۰] | ۵۲۵۹،۳۷۶ | ۵۰۹،۱۴۲ | -۱،۹۳۹ | ۰،۹۶۹ | ۰،۲۵۱ | ۰،۰۰۰۱۹۳ |

| | | | | | | |
|----------|-------|-------|--------|---------|----------|------------------|
| ۰.۰۰۰۱۹۳ | ۰.۷۱۵ | ۴.۲۳۰ | -۸.۴۶۱ | ۱۱۹۷.۲۷ | ۵۹۶۵.۵۸۹ | [۴۵/۰/۹۰/-۴۵/۹۰] |
| ۰.۰۰۰۱۹۳ | ۱.۷۳۸ | ۲۸.۷۸ | ۵۷.۵۶۹ | ۲۶۱۳.۸۷ | ۵۲۱۴.۳۳۳ | [۶۰/۴۵/۹۰/۴۵/۶۰] |
| ۰.۰۰۰۱۹۳ | ۰.۸۸۵ | ۱۷.۶۸ | ۳۵.۳۶۷ | ۱۴۵۱.۱۵ | ۶۵۰۷.۶۱۷ | [۰/۶۰/۴۵/۶۰/۹۰] |

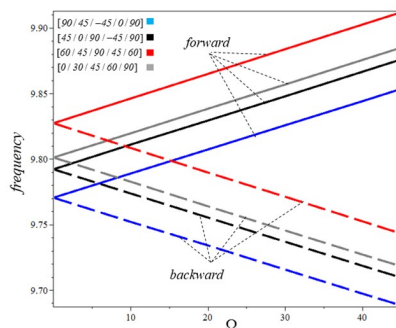
در شکل (۳)، راستای v نقطه‌ی میانی شفت به اندازه 0.01 جابجا و سپس رها شده است. در این حالت گسسته‌سازی توسط یک مود انجام شده و فقط مود اول شفت تحریک شده است. دیده می‌شود که راستای w شفت هم به دلیل وجود اثرات ژيروسکوپی نوسان می‌کند. همچنین به علت نزدیک بودن فرکانس‌های پیش‌گشت و پس‌گشت اول شفت، در تاریخچه زمانی پدیده تپش دیده می‌شود. در این شکل به منظور صحت‌سنجی نتایج حاصله از تئوری اغتشاشات، مقایسه‌ای بین نتایج بدست آمده از این روش و روش عددی انجام شده و دیده می‌شود که پاسخ‌ها از تطابق خوبی برخوردار هستند.



شکل ۳ تاریخچه زمانی ارتعاشات نقطه میانی شفت - گسسته‌سازی تک مود و

$$C_2 = 0.005, C_1 = 0, \Omega = 9, v(0) = 0.01 \text{ و } [90, 45, -45, 0, 90]$$

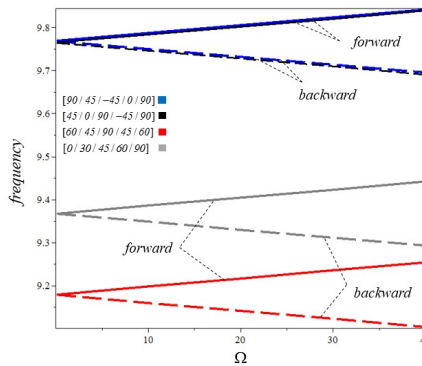
برای مطالعه‌ی ارتعاشات آزاد تیرهای تیموشنکوی کامپوزیتی بهتر است که فرکانس‌های سیستم به صورت دقیق‌تری بررسی شوند. در شکل (۴) تغییرات فرکانس‌های پیش‌گشت و پس‌گشت خطی اول سیستم بر حسب سرعت اسپین و به ازای گسسته‌سازی تک مود رسم شده‌اند. همان‌گونه که واضح است، با افزایش سرعت اسپین، فرکانس‌های پیش‌گشت افزایش و فرکانس‌های پس‌گشت کاهش می‌یابند.



شکل ۴ تغییرات فرکانس‌های پیش‌گشت و پس‌گشت خطی شفت نسبت به سرعت اسپین - گسسته‌سازی تک مود

در حالت گسسته‌سازی تک مود، اثر کوپلینگ‌های S_{14} و S_{25} به صورت خطی ظاهر نمی‌شوند و در نتیجه کاملاً مشهود است که پارامتر برشی S_{22} نقش مهمی در تعیین مقدار فرکانس‌های خطی سیستم خواهد داشت. به طوری که با توجه به شکل فوق می‌توان نتیجه گرفت که هرچه قدر سفتی برشی S_{22} برای یک لایه بیشتر باشد، فرکانس‌های پیش‌گشت و پس‌گشت بزرگتری خواهد داشت.

در شکل ۵ تغییرات فرکانس‌های پیش‌گشت و پس‌گشت خطی اول سیستم بر حسب سرعت اسپین در حالت گسسته‌سازی دو مود رسم شده است. از این شکل می‌توان نتیجه گرفت که در فرکانس‌های پیش‌گشت و پس‌گشت خطی تیرهای کامپوزیتی، کوپلینگ S_{25} نقش مهم‌تری نسبت به ترم‌های برشی دارد. لذا با زیاد شدن مقدار این کوپلینگ، فرکانس‌های پیش‌گشت و پس‌گشت خطی سیستم کاهش می‌یابند. در لایه‌گذاری‌های نامتقارن که مقدار این کوپلینگ بزرگ‌تر است، می‌توان دید که مقدار این فرکانس‌ها کمتر بدست آمده است.



شکل ۵ تغییرات فرکانس‌های پیش‌گشت و پس‌گشت خطی شفت نسبت به سرعت اسپین-گسسته‌سازی دو مود

به منظور نشان دادن دقت مدل ارائه شده، نتایج شکل فوق در شرایط $\Omega = 0$ (برای سادگی) با نتایج به دست آمده از مرجع [۱۲] و شبیه‌سازی FEM مقایسه شدند. این نتایج در جدول (۳) ارائه شده‌اند و نشان می‌دهند که مدل ارائه شده بسیار دقیق است. همان‌طور که از داده‌های این جدول مشهود است، دقت مدل ارائه شده در پیش‌بینی رفتار شفت‌های کامپوزتی با لایه‌چینی نامتقارن به طور قابل توجهی بهتر از مرجع [۱۲] است.

جدول ۳. مقایسه فرکانس‌های طبیعی خطی مدل ارائه شده، مرجع [۱۲] و آباکوس

| خطا (%) | فرکانس طبیعی خطی (Hz) | | فرکانس طبیعی خطی بدون بعد (مدل ارائه شده) | زاویه لایه‌چینی |
|---------|-----------------------|-----------|---|-----------------------|
| | مدل ارائه شده | مرجع [۱۲] | | |
| ۴.۷۶ | ۳.۷۲ | ۱۳۸.۸۸ | ۱۴۵.۴۹ | ۹.۷۷ [۹۰/۴۵/-۴۵/۰/۹۰] |
| ۳.۶۷ | ۲.۵۳ | ۱۲۱.۹۵ | ۱۲۶.۴۳ | ۹.۷۶ [۴۵/۰/۹۰/-۴۵/۹۰] |
| ۱۵.۴۷ | ۷.۳ | ۹۲.۵۹ | ۱۰۶.۹۲ | ۹.۱۷ [۶۰/۴۵/۹۰/۴۵/۶۰] |
| ۱۱.۰۹ | ۵.۲۲ | ۱۰۴.۱۶ | ۱۱۵.۴۳ | ۹.۳۷ [۰/۶۰/۴۵/۶۰/۹۰] |

۴- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله، معادلات غیرخطی حرکت برای شفت‌های دوار کامپوزیتی استخراج و مسئله‌ی ارتعاشات آزاد برای یک شفت دو سر مفصل مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. مهم‌ترین نتایج به دست آمده از مطالعه انجام شده به شرح ذیل می‌باشند:

○ در ارتعاش آزاد شفت‌های کامپوزیتی، حتی اگر یک مود را تحریک کنیم، سایر مودهای ارتعاشی تحریک شده و لازم است اثر آن‌ها در پاسخ سیستم منظور شود.

○ در ارتعاشات آزاد، تأثیر کوپلینگ‌های کامپوزیتی S_{25}, S_{14} بر دامنه سیستم ناچیز بوده و تأثیر آنها بر فرکانس‌های طبیعی قابل توجه است. همچنین اثرات این کوپلینگ‌ها به ویژه S_{25} بیشتر از اثرات سفتی برشی S_{22} است.

- اثرات خطی و غیرخطی زوایای الیاف و همچنین کوپلینگ‌های کامپوزیت در لایه‌چینی نامتقارن بیشتر از متقارن است.
- کوپلینگ S_{25} اثرات قابل توجهی روی معادلات برشی - خمشی دارد. بنابراین با توجه به این‌که در معادلات کلاسیک از در نظر گرفتن اثرات برشی صرف نظر می‌شود، مدل کلاسیک قادر به تجزیه و تحلیل اثرات این کوپلینگ نبوده و حتی در مودهای پایین ارتعاشی نیز تفاوت زیادی بین نتایج به دست آمده از مدل تیموشنکو و مدل کلاسیک وجود دارد.

مراجع

1. MY. Chang, JK. Chen, CY. Chang, "A simple spinning laminated composite shaft model," *International Journal of Solid and Structures*, vol. 41, p. 637-662, (2004).
2. JR. Banerjee, H. Su, "Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of a spinning composite beam," *Computers and Structures*, vol. 84, pp. 1208-1214, (2006).
3. X. Li, YH. Li, Y. Qin, "Free vibration characteristics of a spinning composite thin-walled beam under hydrothermal environment," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 119, pp. 253-265, (2016).
4. DH. Hodges, "A mixed variational formulation based on exact intrinsic equations for dynamics of moving beams," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 26, no. 11, pp. 1253-1273, (1990).
5. DH. Hodges, "Geometrically Exact, Intrinsic Theory for Dynamics of Curved and Twisted Anisotropic Beams," *AIAA Journal*, vol. 41, (2003).
6. HR. Kafi, SAA. Hosseini, "Non-stationary nonlinear analysis of a composite rotating shaft passing through critical speed," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 85, pp. 338-359, (2020).
7. HR. Kafi, SAA. Hosseini, "Dynamic analysis of nonlinear rotating composite shafts excited by non-ideal energy source," *Z Angew Math Mech*, (2019).
8. L. Qi, C. Li, X. Yu, W. Min, H. Shi, L. Tao, H. Wang, M. Yu, L. Ni, Z. Sun, "Effect of reinforced fibers on the vibration characteristics of fibers reinforced composite shaft tubes with metal flanges," *Composite Structures*, vol. 275, (2021).
9. S. Na, H. Yoon, L. Librescu, "Effect of taper ratio on vibration and stability of a composite thin-walled spinning shaft," *Thin-Walled Structures*, vol. 44, no. 3, pp. 362-371, (2006).
10. DH. Hodges, *Nonlinear Composite Beam Theory*, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, (2006).
11. AH. Nayfeh, *Perturbation Methods*, Weinheim: WILEY-VCH Verlag GmbH & CO. KGaA, (2004).
12. H. Shaban Ali Nezhad, SAA. Hosseini, M. Zamanian, "Flexural-flexural-extensional-torsional vibration analysis of composite spinning shafts with geometrical nonlinearity," *Nonlinear Dynamics*, vol. 89, no. 1, pp. 651-690, 2017.