



ISAV2024

چهارمین کنفرانس بین المللی آکوستیک و ارتعاشات
۲۱ و ۲۲ آذر ماه ۱۴۰۳ کرج - ایوان



تحلیل پایداری تیر دوسرگردار متصل به یک جفت سیلندر دمبل شکل تحت تحریک جریان گردابی

مهدی زمانیان^{۱*}، محمد بیگدلو^۲

آیران، تهران، دانشگاه خوارزمی، دانشکده فنی و مهندسی، کدپستی: ۱۴۹۱۱-۱۵۷۱۹، دانشیار گروه مهندسی مکانیک

آیران، تهران، دانشگاه خوارزمی، دانشکده فنی و مهندسی، کدپستی: ۱۴۹۱۱-۱۵۷۱۹، دانشجوی کارشناسی ارشد

مهندسی مکانیک

*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: zamanian@khu.ac.ir

چکیده

در این مقاله به آنالیز پایداری تیر دو سرگرداری که در وسط آن یک جفت استوانه به صورت دمبلی شکل، ضمیمه شده و تحت تاثیر جریان گردابی قرار دارد، پرداخته می‌شود. بر روی تیر یک لایه‌ی پیزوالکتریک با هدف برداشت جریان الکتریکی از ارتعاشات ناشی از جریان گردابی فرض می‌شود. معادلات حرکت به کمک قانون دوم نیوتن نوشته شده و نیروی آیرودینامیکی توسط معادله‌ی نوسانگر وندریپول اصلاح شده مدلسازی می‌شود. شکل مودهای ارتعاش آزاد نیز با استفاده از روش گلرکین به دست می‌آیند و معادلات حرکت با روش گلرکین جداسازی شده و بر روی آنها آنالیز پایداری صورت می‌گیرد. در این مقاله یک رابطه‌ی تئوری برای تخمین ناحیه‌ای که سیستم خطی در آن ناپایدار می‌شود ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که رابطه‌ی حاصله به خوبی می‌تواند ناحیه‌ی لاکین را تخمین بزند و در نتیجه از پیچیدگی‌های حل عددی برای یافتن ناحیه لاکین جلوگیری شود.

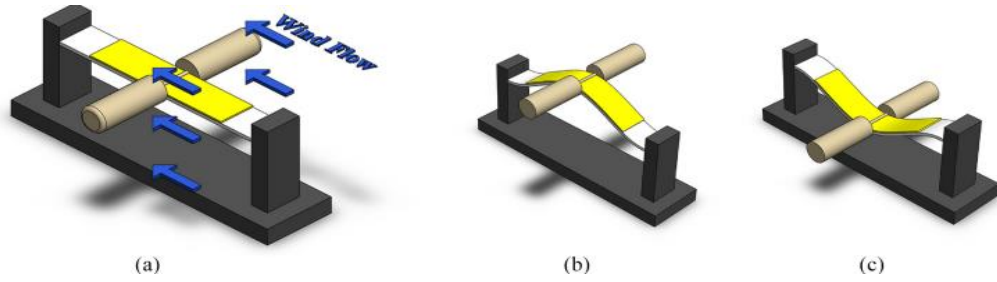
کلمات کلیدی: ارتعاش ناشی از گردابه، ناحیه‌ی لاکین، پیزوالکتریک، آنالیز پایداری.

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، بسیاری از محققان بر یافتن راه‌هایی برای تبدیل ارتعاشات موجود در برخی از سیستم‌ها به انرژی الکتریکی متمرکز شده‌اند. یکی از این راه‌های برداشت انرژی، استفاده از اثر مستقیم مواد پیزوالکتریک است، که طبق آن در اثر اعمال کرنش مکانیکی به این مواد، اختلاف پتانسیل الکتریکی در آن‌ها ایجاد می‌شود [۱]. چنانچه این مواد بر روی تیر مرتعشی که تحت تحریک خارجی است، قرار گیرند، ارتعاش اعمالی به تیر منجر به ایجاد تنش نوسانی در لایه پیزوالکتریک شده و سیستم به عنوان یک برداشت‌کننده عمل خواهد کرد. اخیراً تحریک توسط جریان گردابی به عنوان یکی از روش‌های تحریک مورد بررسی‌های مختلفی قرار گرفته است. در این روش جریان بر روی یک استوانه متصل به تیر عبور داده می‌شود. با عبور جریان بر روی استوانه در یک محدوده از سرعت سیال گردابه‌های متناوب در پشت استوانه ایجاد می‌شود. این گردابه‌ها منجر به نیروی لیفت نوسانی شده و تیر عمود بر جریان سیال مرتعش خواهد شد که به آن VIV که خلاصه شده‌ی ارتعاش ناشی از گردابه است، گفته می‌شود [۲]. در ابتدا که این گردابه‌ها شروع به ریزش می‌کنند فرکانس آن‌ها مستقل از فرکانس طبیعی سازه است، در ادامه با افزایش سرعت جریان سیال فرکانس ریزش گردابه نیز افزایش یافته و با نزدیک شدن آن به فرکانس طبیعی سازه، برهمکنش قابل توجهی بین جریان سیال و سازه اتفاق می‌افتد، به گونه‌ای که در این دامنه‌ی خاص از سرعت جریان سیال، فرکانس ریزش گردابه بر روی فرکانس طبیعی سازه قفل شده و باعث ایجاد محدوده‌ی نوساناتی بزرگی می‌شود، که به این ناحیه از سرعت جریان سیال، ناحیه‌ی لاکین گفته می‌شود. و در نهایت با افزایش بیشتر سرعت جریان سیال، دامنه‌ی نوسان کاهش می‌یابد. تخمین این ناحیه نقش مهمی در طراحی این سیستم‌ها دارد. در تحقیقات قبلی عموماً با حل عددی معادلات این ناحیه را تخمین زده‌اند. لانگری و همکارانش در تحقیقات متعددی بر روی یک روش تئوری برای آنالیز پایداری کار کردند و نشان دادند که ناحیه ناپایداری سیستم خطی منطبق بر ناحیه لاکین می‌باشد [۳و۴]، لیکن این مدل‌سازی عموماً برای سیستم‌های بدون لایه پیزوالکتریک و صرفاً برای یک نخ و یا تیر استوانه‌ای شکل که تحت ارتعاش ناشی از گردابه است، صورت گرفته است. اخیراً زمانیان و همکارانشان به اعمال این روش در تیرها با لایه پیزوالکتریک تحت جریان گردابی پرداخته‌اند. این مقاله به طور خاص بر روی این موضوع متمرکز شده است و به ارائه‌ی یک فرمول تئوری برای تخمین ناحیه لاکین برای تیر دوسرگردار که با عبور جریان از روی یک استوانه دمبل شکل متصل به میانه تیر تحت ارتعاش ناشی از گردابه قرار می‌گیرد، پرداخته می‌شود.

۲- مدل‌سازی و فرمولبندی ریاضی

همانطور که در شکل (۱) مشاهده می‌شود، سیستم مورد بررسی شامل یک تیر با طول L_s است که تحت تحریک نیروی لیفت متناوب ناشی از ریزش گردابه‌ها می‌باشد. این تیر به صورت دو سرگیر دار می‌باشد. بر روی آن یک لایه پیزوالکتریک نصب شده است. پهنا‌ی لایه پیزوالکتریک با پهنا‌ی تیر برابر و در میانه تیر نصب شده است. ابتدا و انتهای لایه پیزوالکتریک با طول L_p دارای فاصله یکسان L_1 و L_2 از دو سمت تیر می‌باشد. در مرکز تیر یک جفت استوانه فومی هر یک به قطر D و طول L_C نصب شده است که با برخورد سیال به آن به دلیل نیروی لیفت ناشی از سیال در اثر ارتعاشات ناشی از گردابه دچار نوسان می‌شود.



شکل (۱): (a) مدل سه بعدی سیستم، (b) و (c) سیستم مرتعش شده معادلات حرکت براساس تئوری تیر اویلر-برنولی با فرض جابجایی در راستای Z به صورت زیر می باشد [۵]:

$$I_E(X) \frac{\partial^4 W(X,t)}{\partial X^4} + c(X) \frac{\partial W(X,t)}{\partial t} + m(X) \frac{\partial^2 W(X,t)}{\partial t^2} = F_L(X,t) + \frac{\partial M_p(X,t)}{\partial x} \quad (1)$$

در معادله بالا $m(X)$ جرم بر واحد طول سیستم، $c(X)$ میرایی سیستم، $I_E(X)$ سختی خمشی سطح مقطع، M_p گشتاور خمشی معادل اثر الکتریکی لایه‌ی پیزوالکتریک می‌باشد که در نقاط ابتدا و انتهای لایه‌ی پیزوالکتریک به تیر اعمال می‌شود و $F_L(X,t)$ اثر نیروی لیفت بر روی استوانه را بیان می‌کند. این عبارتها به صورت زیر توصیف می‌شوند:

$$I_E(X) = I_s(H(X) - H(X - L_1)) + I_{sp}(H(X - L_1) - H(X - L_2)) + I_s H(X - L_2),$$

$$H_{L_i} = Heaviside(X - L_i) = \begin{cases} 0 & X < L_i, \\ 1 & X \geq L_i, \end{cases}$$

$$m(X) = m_s(H(X) - H(X - L_1)) + m_{sp}(H(X - L_1) - H(X - L_2)) + m_s H(X - L_2) + M_c \delta(X - \frac{L_s}{2}),$$

$$c(X) = c_v + (2\pi S_T \frac{U}{D} \gamma \rho_f D^2) \delta(X - \frac{L_s}{2})$$

$$\gamma = \frac{c_d}{4\pi S_T}, \quad (2)$$

$$M_p = \frac{E_p d_{31} \bar{A}_p V(t)}{h_p} (\delta(X - L_2) - \delta(X - L_1)),$$

$$F(X,t) = \frac{1}{4} \rho_f U^2 C_{L0} D Q(t) \delta(X - \frac{L_s}{2})$$

در معادله بالا m_s ، m_{sp} ، I_s ، I_{sp} ، c_d ، E_p ، d_{31} ، \bar{A}_p و ρ_f به ترتیب نشان دهنده‌ی ممان اینرسی دوم سطح در قسمت تک لایه، ممان اینرسی دوم سطح در قسمت دو لایه، جرم در واحد طول در قسمت تک لایه و جرم بر واحد طول در قسمت دو لایه و M_c جرم استوانه می‌باشد. S_T ، U ، c_d ، E_p ، d_{31} و \bar{A}_p به ترتیب نشان دهنده عدد استروهال، سرعت جریان، ضریب درگ، مدول یانگ لایه پیزوالکتریک، ثابت پیزوالکتریک، ممان اینرسی اول سطح لایه پیزوالکتریک حول تار خمشی خمشی و چگالی جرمی جریان سیال می‌باشد. $H(X - L_i)$ و $\delta(X - L_i)$ به ترتیب تابع پله و تابع ضربه در محل L_i می‌باشد. متغیر $q(t)$ به صورت $2C_L(t)/C_{L0}$ می‌باشد در حالیکه

صورت زیر می باشد: $C_L(t)$ ضریب لیفت می باشد و برابر است با $2C_L(t)/C_{L0}$ در حالیکه $C_{L0} = 0.3$. معادله دیفرانسیل حاکم بر ضریب $q(t)$ به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} + \eta(2\pi S_T \frac{U}{D})(q^2(t) - 1) \frac{dq(t)}{dt} + (2\pi S_T \frac{U}{D})^2 q(t) = \frac{G}{D} \frac{\partial^2 W(X, t)}{\partial t^2} \Bigg|_{X = \frac{L_s}{2}} \quad (3)$$

در حالیکه η و G برابر ۰,۳ و ۱۲ می باشند. معادله دیفرانسیل حاکم بر ولتاژ خروجی با اعمال قانون گاوس به صورت زیر می باشد [۴]:

$$e_{31} h_p b_p \int_{L_1}^{L_2} \frac{\partial^3 W}{\partial X^2 \partial t} ds + \frac{\epsilon_{33} b_p (L_2 - L_1)}{h_p} \frac{dV(t)}{dt} + \frac{V(t)}{R} = 0 \quad (4)$$

معادلات به کمک تغییر متغیرهای زیر بی بعد می شوند:

$$w = \frac{W}{D}, \quad x = \frac{X}{L_s}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad T = \sqrt{\frac{\rho_s A_s L_s^4}{E_s I_s}} \quad (5)$$

با اعمال این تغییر متغیرها به معادله (۱):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\bar{I}_E(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}) + \bar{c}_v(x) \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \bar{c}_d(x) \Omega_f \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \bar{m}(x) \frac{\partial^2 w(x, \tau)}{\partial \tau^2} &= \bar{f}_L(x) \Omega_f^2 q + \bar{f}_p(x) V(t) \\ \frac{d^2 q(\tau)}{\partial \tau^2} + \eta(q^2(x, \tau) - 1) \frac{\partial q(x, \tau)}{\partial \tau} + \Omega_f^2 q(x, \tau) &= G \frac{\partial^2 w(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Bigg|_{x = \frac{1}{2}}, \\ \frac{e_{31} h_p b_p D}{L_s T} \int_{L_1/L_s}^{L_2/L_s} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \tau} dx + \frac{(L_2 - L_1) \epsilon_{33} b_p}{h_p T} \frac{dV(\tau)}{d\tau} + \frac{V(\tau)}{R} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

در حالیکه:

$$\begin{aligned} \bar{m}(x) &= (1 - H(x - \frac{L_1}{L_s})) + \frac{m_{sp}}{m_s} (H(x - \frac{L_1}{L_s}) - H(x - \frac{L_2}{L_s})) + H(x - \frac{L_2}{L_s}) + \frac{M_c}{m_s L_s} \delta(x - \frac{1}{2}), \\ q(\tau) &= q(t) \Big|_{t = T\tau}, \quad \bar{c}_v(X) = \frac{c_v T}{\rho_s A_s}, \quad \bar{c}_d(X) = \frac{2\gamma \rho_f D^2 L_c}{\rho_s A_s L_s} \delta(x - \frac{1}{2}), \\ \bar{f}_L(x) &= \frac{2\rho_f C_{L0} D^2 L_c}{16\pi^2 \rho_s A_s S_T^2 L_s} \delta(x - \frac{1}{2}), \\ \bar{f}_p(x) &= \frac{T^2 M_p}{DL_s^2 m_s V(t)} \left(\frac{d}{dx} \delta(x - \frac{L_2}{L_s}) - \frac{d}{dx} \delta(x - \frac{L_1}{L_s}) \right), \\ \Omega_f &= \frac{2\pi S_T U T}{D} \end{aligned} \quad (7)$$

۳- شکل مود و فرکانس طبیعی

با فرض ارتعاش آزاد سیستم به صورت $w(x,t) = \Phi_n(x)e^{i\omega_n t}$ و صرف نظر از جمله میرایی، معادله دیفرانسیل حاکم بر شکل مود به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\bar{I}_E(x) \frac{d^2 \Phi_n(x)}{dx^2} \right) - \omega^2 m(x) \Phi_n(x) = 0 \quad (8)$$

معادله‌ی بالا را با اعمال روش گلرکین و با فرض شکل مودهای تیر ساده بدون لایه‌ی پیزوالکتریک، به عنوان تابع مقایسه‌ای،

می‌توان حل نمود. بنابراین با فرض $\Phi_n(x) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x)$ در حالیکه $\varphi_i(x)$ شکل مود تیر ساده بدون لایه پیزوالکتریک و استوانه‌ها می‌باشد. همچنین $C_i, i=1 \dots n$ ضرایبی هستند که با اعمال روش گلرکین به دست می‌آیند. بنابراین با جایگذاری فرض مربوطه در معادله (۸)، و سپس ضرب نتیجه حاصل شده در $\varphi_j(x)$ و انتگرال گیری در بازه $x=0 \dots 1$ نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^n C_i \frac{d^2}{dx^2} \left(\bar{I}_E(x) \frac{d^2 \varphi_i(x)}{dx^2} \right) \varphi_j(x) dx - \omega^2 \int_0^1 \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) m(x) \varphi_j(x) dx = 0 \quad (9)$$

فرکانس طبیعی و شکل مود با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ضرایب به دست آورده می‌شود. حال پاسخ ارتعاش سیستم تحت جریان گردابی به صورت $w(x,t) = \Phi_n(x)P(\tau)$ فرض می‌شود، در حالیکه $P(\tau)$ تابع مختصات زمانی پاسخ می‌باشد. با جایگذاری فرض مربوطه در معادله‌ی (۶) و ضرب نتایج در $\Phi_n(x)$ و انتگرال گیری از بازه‌ی $x=0 \dots 1$ ، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P(\tau)}{d\tau^2} + \omega_n^2 P(\tau) + C_{eq} \frac{dP(\tau)}{d\tau} &= F_{eqp} V(t) + F_{eqL} \Omega_f^2 q(\tau) , \\ \frac{d^2 q(\tau)}{d\tau^2} + \eta \Omega_f [q(\tau)^2 - 1] \frac{dq(\tau)}{d\tau} + \Omega_f^2 q(\tau) &= G_{eq} \frac{d^2 P(\tau)}{d\tau^2} , \\ \chi \frac{dP(\tau)}{d\tau} + C_p \frac{dV(\tau)}{d\tau} + \frac{V(\tau)}{R} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

در حالیکه:

$$m_{eq} = \int_0^1 m(x) \Phi_n^2 dx , \quad C_{eq} = \frac{\int_0^1 \bar{c}_v(x) \Phi_n^2 dx + \Omega_f \int_0^1 \bar{c}_d(x) \Phi_n^2 dx}{m_{eq}} , \quad F_{eqp} = \frac{\int_0^1 \bar{f}_p(x) \Phi_n dx}{m_{eq}} ,$$

$$F_{eqL} = \frac{\int_0^1 \bar{f}_L(x) \Phi_n dx}{m_{eq}} , \quad G_{eq} = G \Phi_n \Big|_{x=0.5} , \quad \chi = \frac{e_{31} b_p h_p D}{L_s T} \left(\frac{d\Phi_n}{dx} \Big|_{x=\frac{L_2}{L_s}} - \frac{d\Phi_n}{dx} \Big|_{x=\frac{L_1}{L_s}} \right) ,$$

$$C_p = \frac{\epsilon_{33} b_p}{h_p T} (L_2 - L_1) \quad (11)$$

۴- آنالیز پایداری

با صرف نظر از جمله میرایی، معادله‌ی حاکم بر حرکت و معادله‌ی حاکم بر نوسانگر به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{d^2 P(\tau)}{d\tau^2} + \omega_n^2 P(\tau) = F_{eqL} \Omega_f^2 q(\tau), \quad \frac{d^2 q(\tau)}{d\tau^2} + \Omega_f^2 q(\tau) = G \frac{d^2 P(t)}{dt^2} \quad (12)$$

پاسخ معادله‌ی بالا به صورت زیر فرض می‌شود:

$$P(\tau) = \bar{P} e^{v\tau}, \quad q(\tau) = \bar{q} e^{v\tau} \quad (13)$$

با جایگذاری در معادله‌ی (۱۲):

$$(v^2 + \omega_n^2) \bar{P} - F_{eqL} \Omega_f^2 \bar{q} = 0, \quad -G v^2 \bar{P} + (v^2 + \Omega_f^2) \bar{q} = 0 \quad (14)$$

حل غیر صفر برای دستگاه بالا زمانی حاصل می‌شود که دترمینان ضرایب مخالف صفر باشد. در اینصورت:

$$v^4 + (\omega_n^2 + \Omega_f^2 - F_{eqL} G \Omega_f^2) v^2 + \omega_n^2 \Omega_f^2 = 0 \quad (15)$$

با حل معادله‌ی جبری (۱۵):

$$2(v_{\pm})^2 = -(\omega_n^2 + \Omega_f^2 - F_{eqL} G \Omega_f^2) \pm \sqrt{(\omega_n^2 + \Omega_f^2 - F_{eqL} G \Omega_f^2)^2 - 4\omega_n^2 \Omega_f^2} \quad (16)$$

وقتی عبارت داخل رادیکال مثبت باشد مقادیر ویژه موهومی محض خواهند شد و پاسخ برای سیستم خطی پریودیک خواهد شد و وقتی که عبارت داخل رادیکال صفر باشد هر دو مقدار ویژه بر هم منطبق می‌شوند. بنابراین با مساوی صفر قرار دادن عبارت زیر رادیکال خواهیم داشت:

$$(\omega_n^2 + (1 - F_{eqL} G) \Omega_f^2)^2 - 4\omega_n^2 \Omega_f^2 = 0 \quad (17)$$

با حل معادله (۱۷) مقداری از Ω_f که باعث می‌شود مقادیر ویژه بر هم منطبق شوند به صورت زیر است:

$$\Omega_{f\pm}^2 = \frac{\omega_n}{1 \pm \sqrt{F_{eqL} G}} \quad (18)$$

در ناحیه‌ی $\Omega_{f+} < \Omega_f < \Omega_{f-}$ ، سیستم خطی بدون میرایی ناپایدار می‌شود. با جایگذاری فرکانس ریزش گردابه در فرم بی بعد

در آخرین معادله از مجموعه معادلات (۷)، بازه‌ای از سرعت باد که در آن سیستم ناپایدار می‌شود به صورت زیر خواهد شد:

$$U = \frac{D}{2\pi S_T T_b} \frac{\omega_n}{1 \pm \sqrt{F_{eqL} G}} \quad (19)$$

مطابق با معادله‌ی (۱۴)، شکل مود سیستم خطی با در نظر گرفتن اثر گردابه به صورت زیر خواهد شد:

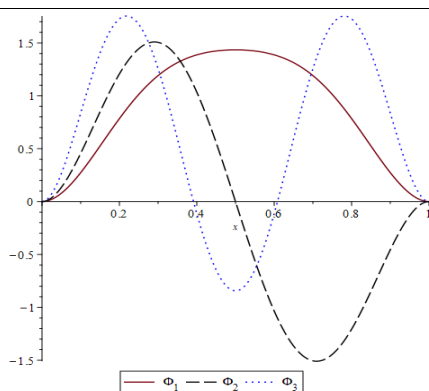
$$\frac{\bar{P}}{\bar{q}} = \frac{F_{eqL} \Omega_f^2}{(v^2 + \omega_n^2)} = \frac{(v^2 + \Omega_f^2)}{G v^2} \quad (20)$$

۵- بحث و نتایج

پاسخ سیستم، برای پارامترهای نشان داده شده در جدول ۱ به دست می‌آید. شکل موده‌های اول، دوم، سوم و فرکانس‌های طبیعی منطبق بر آن در شکل (۲)، و تغییرات مقادیر ویژه‌ی سیستم خطی نامیرا بر حسب سرعت باد در شکل (۳) نشان داده شده است:

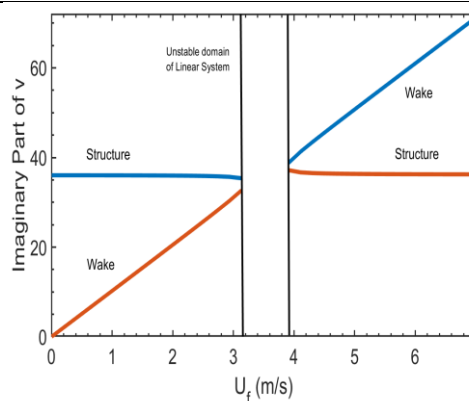
جدول ۱. خصوصیات هندسی و مکانیکی سیستم

$h_s (mm)$	$L_s (mm)$	$E_s (Gpa)$	$b_s (mm)$	$\rho_s (kg / m^3)$	$L_c (mm)$	$D (mm)$
۷۱	۱۳۰	۲۰۰	۷,۳	۷۸۰۰	۲۰۰	۲۰
$h_p (mm)$	$L_p (mm)$	$E_p (Gpa)$	$b_p (mm)$	$\rho_p (kg / m^3)$	$d_{31} (pm.V^{-1})$	$\epsilon_{33} (nF / m)$
۳۰۰	۶۰	۳۰,۳۳۶	۷,۳	۵۴۴۰	-۲,۱	۳,۱۵



شکل (۲): شکل مود اول (قرمز)، دوم (مشکی)، سوم (آبی).

در فرکانس‌های $\omega_1 = 36.03587$, $\omega_2 = 173.6$, $\omega_3 = 304.09128$



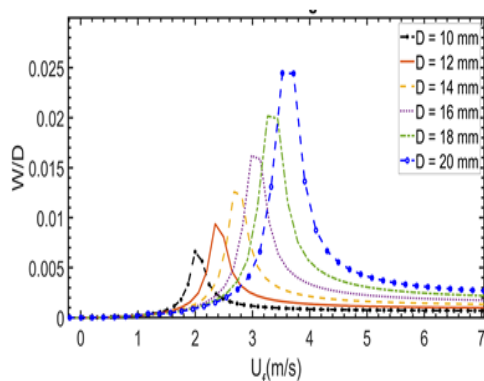
شکل (۳): تغییرات مقادیر ویژه‌ی سیستم خطی نامیرا بر حسب

تغییرات سرعت باد

تغییرات مقادیر ویژه‌ی سیستم بر حسب تغییرات سرعت جریان باد با در نظر گرفتن اثرات نوسانگر در شکل (۳) نشان داده شده است. اولین مقدار ویژه، متعلق به سازه است و مقدار آن برای جریان سیال در سرعت‌های کم تقریباً ثابت است و با فرکانس طبیعی ارتعاشات آزاد سیستم برابر می‌باشد. مقدار ویژه‌ی دوم متعلق به نوسانگر بوده و با افزایش سرعت باد افزایش می‌یابد تا تقریباً برابر اولین مقدار ویژه می‌شود. بعد از این مقدار، مقادیر ویژه‌ی موهومی، با قسمت حقیقی مثبت خواهند شد و ناحیه‌ی ناپایدار شروع می‌شود. این ناحیه تا زمانی ادامه می‌یابد که دو مقدار ویژه مجدداً موهومی محض می‌شوند. شکل ۴ که نشان دهنده دامنه حالت پایدار بر مقادیر مختلف از قطر سیلندر می‌باشد نشان می‌دهد این ناپایداری در عمل اتفاق نمی‌افتد و سیستم در محدوده‌ی ناحیه‌ی تخمین زده شده در حالت پر بودیک ارتعاش خواهد کرد و برداشت‌کننده‌ی انرژی بیشترین میزان انرژی الکتریکی را در آن ناحیه برداشت خواهد نمود. علت پایدار شدن سیستم غیر خطی نسبت به ناپایداری سیستم خطی وجود ترم غیر خطی در معادله‌ی Van Der Pol می‌باشد. این ترم سبب می‌شود که ناحیه‌ی ناپایداری سیستم خطی به ناحیه‌ی همگام‌سازی یا Lock-in در سیستم غیر خطی تبدیل شود.

همانطور که در شکل (۴) مشاهده می‌شود در سرعت ۳ متر بر ثانیه که پدیده‌ی قفل آغاز می‌شود دامنه نوسانات سیستم به طور قابل توجهی افزایش می‌یابد. همچنین این شکل نشان می‌دهد که دامنه حالت پایدار در ناحیه لاکین با افزایش قطر سیلندر افزایش

می‌یابد و در مقابل سرعت باد لازم برای ورود به ناحیه لاکین نیز افزایش می‌یابد. علت این تغییرات را با فرمول تئوری به دست آمده در این مقاله می‌توان توجیه کرد. مطابق این رابطه سرعت شروع ناحیه لاکین با سرعت باد و فرکانس طبیعی رابطه مستقیم دارد و با مجذور نیروی لیفت معادل رابطه عکس دارد که مطابق این رابطه تغییرات نشان داده شده در شکل ۴ را می‌توان توجیه کرد.



شکل ۴: تغییرات دامنه‌ی نوسانات سیلندر برحسب تغییرات سرعت باد برای قطرهای مختلف استوانه

۶- نتیجه گیری

آنالیز پایداری برای ارتعاشات ناشی از جریان گردابی بر روی تیر دوسرگیر که دو استوانه به صورت دمیل در قسمت میانی آن اضافه شده اند، ارائه شد و یک رابطه تئوری برای تخمین ناحیه لاکین ارائه شد. نتایج نشان می‌دهد، که رابطه‌ی تئوری ارائه شده در این مقاله به درستی ناحیه لاکین را تخمین می‌زند.

مراجع

- [1] C.Covaci A.Gontea, "Piezoelectric energy harvesting solutions: A review", *Sensors* 20, 3512(2020).
- [2] J.Wang, L.Geng, L.Ding, H.Zhu, D.Yurchenko, "The state-of-the-art review on energy harvesting from flow-induced vibrations", *Applied Energy*, 267, 114902(2020).
- [3] E. de Langre, "Frequency lock-in is caused by coupledmode flutter", *J. Fluid Struct.*, 22, 783-791. (2006) ,
- [4] M.L. Facchinetti, E. de Langre, F.Biolley, "Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations", *J Fluid Struct.*, 19, 123-140. (2004).
- [5] M.Alimanesh, M.Zamanian, Analysis of clamped-clamped piezoelectric energy harvester under vortex induced vibration considering the stretching effect, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* , 35, 333–351(2024).