تحلیل ارتعاشات آزاد نانولوله‌های کربنی با مدل پوسته‌های نازک و تئوری غیرمحلی ارینگن

مهدی باباخانی[آ]، عیسی احمدی[ب]*

[آ] ایران، زنجان، دانشگاه زنجان، دانشکده مهندسی، کد پستی: ۳۸۷۹۱-۴۵۷۳۱، کارشناسی ارشد

[ب] ایران، زنجان، دانشگاه زنجان، دانشکده مهندسی، کد پستی: ۳۸۷۹۱-۴۵۷۳۱، دانشیار

* پست الکترونیکی نویسنده مسئول: *i_ahmadi@znu.ac.ir*

چکیده

در پژوهش حاضر، فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد نانولوله‌های کربنی با استفاده از مدل پوسته‌های نازک و تئوری الاستیسیته غیرمحلی مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات حرکت حاکم بر حرکت نانولوله بر اساس تئوری پوسته لاو ارائه شده است. از آنجایی که تئوری کلاسیک الاستیسیته در تحلیل نانوسازه‌ها اثر اندازه کوچک را در نظر نمی‌گیرد و دارای خطا در پاسخ می‌باشد، بنابراین برای درنظر گرفتن اثرات اندازه کوچک در تحلیل رفتار نانولوله از تئوری الاستیسیته غیرمحلی ارینگن در مدل‌سازی مساله استفاده شده است. برای حل مساله ارتعاشات آزاد نانوتیر از روش ناویر استفاده شده و با حل معادلات حاکم، فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد نانولوله استخراج شده است. پیش‌بینی مدل ارائه شده برای فرکانس‌های طبیعی با پیش‌بینی‌های موجود در منابع مقایسه شده است. سپس در قسمت نتایج عددی تاثیر پارامترهای مختلف از جمله نسبت طول به شعاع نانولوله، نسبت شعاع به ضخامت نانولوله و همچنین تاثیر بسترالاستیک و اثر ضریب غیرمحلی بر فرکانس طبیعی نانولوله کربنی بررسی شده و نتایج عددی متعدد ارائه شده است.

کلمات کلیدی: نانولوله‌های کربنی تک‌جداره؛ فرکانس طبیعی؛ تئوری پوسته‌های نازک؛ تئوری الاستیسیته غیرمحلی

۱- مقدمه

نانوفناوری به معنای توانایی کارکردن در مقیاس اتمی، مولکولی و فراتر از آن در ابعاد ۱ تا ۱۰۰ نانومتر، با هدف دخل و تصرف در چگونگی آرایش اتم‌ها برای رسیدن به بازدهی بیشتر مواد می‌باشد. فناوری نانو از دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ آغاز گردید. نانولوله‌های کربنی[1] نوعی آلوتروپ[2] کربن هستند که در سال ۱۹۹۱ توسط سامیو ایجیما [۱] کشف شدند. نانولوله‌های کربنی تک‌جداره تنها از یک لایه ورق گرافیتی تشکیل شده‌اند، دارای طول کمی بوده و قابلیت شکل‌پذیری بالایی دارند به صورتی که به راحتی می‌توان آن‌ها را دچار پیچش یا خمش کرد. نانولوله‌ها نسبت طول به قطر بالایی دارند. نانولوله‌های کربنی از خواص قابل توجه فیزیکی، مکانیکی، الکتریکی و حرارتی مانند استحکام بالا، سفتی بالا و هدایت حرارتی و الکتریکی عالی برخوردارند. در طول سالیان گذشته کارهای

---

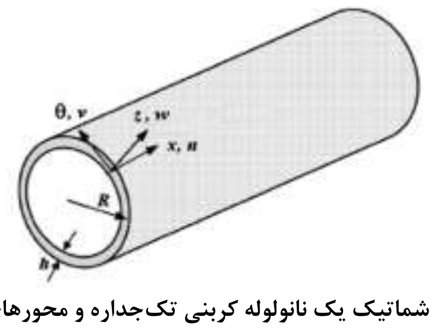
[1] Carbon nanotubes
[2] Allotrope

تحلیلی و عددی بسیاری در زمینه رفتار ارتعاشی نانولوله‌های کربنی انجام شده است. ارتعاش نانولوله‌های کربنی از اهمیت زیادی در فناوری نانو برخوردار است و درک ویژگی‌های ارتعاشی نانولوله‌های کربنی گام کلیدی برای بسیاری از دستگاه‌های نانومکانیکی مانند نوسانگرها، آشکارسازهای بار، ساعت‌های مقیاس نانو و حسگرها است. بنابراین، تجزیه و تحلیل ارتعاش نانولوله‌های کربنی به موضوع مورد توجه اولیه در مطالعات اخیر تبدیل شده است. انصاری و همکاران [۲] در سال ۲۰۱۶ رفتار ارتعاشی نانولوله‌های کربنی تک‌جداره تحت شرایط مرزی مختلف را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها برای درنظر گرفتن اثرات اندازه، معادلات الاستیسیته غیرمحلی ارینگن را در نظریه پوسته دانل گنجاندند. برای حل معادلات حاکم از روش رایلی-ریتز استفاده شده است. در سال ۲۰۱۷ حسین و همکاران [۳] به تجزیه و تحلیل رفتار ارتعاشی نانولوله‌های کربنی تک‌جداره بر اساس نظریه پوسته دانل پرداختند و از رویکرد انتشار موج برای حل معادلات استخراج شده استفاده کردند. نتایج به دست آمده از روش انتشار موج، در تطابق رضایت بخش با نتایج شبیه‌سازی دینامیک مولکولی شناخته شده قبلی است. آمراموف [۴] در سال ۲۰۱۸ ارتعاشات غیرخطی نانولوله‌های کربنی تک‌جداره با مدل پوسته الاستیک غیرمحلی را مورد مطالعه قرار داد. او از نظریه پوسته سندرز-کویتر و روش گلرکین استفاده کرد. در سال ۲۰۲۰ عبدالله و همکاران [۵] به بررسی تاثیر دما بر ارتعاش نانولوله‌های کربنی تک‌جداره دارای ترک تعبیه شده در بستر الاستیک در شرایط مرزی مختلف پرداختند. تئوری مورد استفاده در این پژوهش، تئوری غیرمحلی تیر اویلر-برنولی می‌باشد. اثر دماهای پایین و بالا، شدت ترک، موقعیت ترک، اثر اندازه کوچک و محیط الاستیک بر رفتار ارتعاشی نانولوله‌ها در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفته است. در سال ۲۰۲۳ سلیم و همکاران [۶] به بررسی ارتعاشات پیچشی نانولوله‌های کربنی تک‌جداره نامنظم پرداختند. تئوری مورد استفاده در این مقاله، تئوری پوسته فلوگی می‌باشد.

در این پژوهش ارتعاشات آزاد و فرکانس‌های طبیعی نانولوله‌های کربنی تک‌جداره احاطه شده در بستر الاستیک بررسی شده است. از تئوری لاو برای برای مدلسازی رفتار مکانیکی نانولوله استفاده شده است و از تئوری ارینگن برای در نظر گرفتن اثر اندازه کوچک استفاده شده است. معادلات حاکم با روش ناویر حل شده و فرکانس‌های طبیعی نانولوله کربنی استخراج شده است. در نتایج عددی تاثیر پارامترهای مختلف مانند ضریب غیرمحلی، نسبت طول به شعاع، نسبت شعاع به ضخامت و همچنین ضریب بستر الاستیک وینکلر و پاسترناک بر فرکانس طبیعی نانولوله‌های کربنی تک‌جداره بررسی شده است و نتایج عددی مختلف ارایه شده است.

۲- معادلات حاکم و فرمولاسیون

نانولوله کربنی تک‌جداره با ضخامت h، طول L، و شعاع R در شکل (۱) نشان داده شده است. سیستم مختصات (x,θ,z) برای نانولوله در نظر گرفته شده است بطوری که مختصات x در راستای محوری پوسته، مختصات θ در راستای محیطی نانولوله و z در راستای شعاعی نانولوله می‌باشد. از مدل پوسته برای مدلسازی رفتار نانولوله استفاده شده است و جابجایی سطح میانی پوسته در راستای x، θ و z بترتیب با u، v و w نشان داده شده است. برای مدلسازی رفتار نانولوله، میدان جابجایی پوسته براساس تئوری پوسته کلاسیک بصورت رابطه (۱) درنظر گرفته شده است. که $\bar{u}(x,\theta,z,t)$، $\bar{v}(x,\theta,z,t)$ و $\bar{w}(x,\theta,z,t)$ به ترتیب نشان دهنده جابجایی در راستای طولی، محیطی و شعاعی نانولوله می‌باشد. از آنجایی که تئوری کلاسیک الاستیسیته در تحلیل نانوسازه‌ها اثر اندازه کوچک را در نظر نمی‌گیرد، در این مقاله از تئوری الاستیسیته غیرمحلی [۷] برای مدل‌سازی رفتار ماده در اندازه کوچک استفاده شده است.



شکل ۱: شکل شماتیک یک نانولوله کربنی تک‌جداره و محورهای مختصات

$$\begin{aligned} \bar{u}(x,\theta,z,t) &= u(x,\theta,t) - z\frac{\partial w}{\partial x} \\ \bar{v}(x,\theta,z,t) &= v(x,\theta,t) - z(\frac{\partial w}{R\partial\theta} + \frac{v}{R}) \\ \bar{w}(x,\theta,z,t) &= w(x,\theta,t) \end{aligned} \tag{۱}$$

تفاوت اصلی بین تئوری کلاسیک محلی و تئوری الاستیسیته غیرمحلی در تعریف تنش است. در نظریه کلاسیک محلی، بین تنش و کرنش در هر نقطه یک تناظر یک به یک برقرار است. بدین معنی که تنش یک نقطه فقط تابعی منحصر بفرد از کرنش در همان نقطه است، در حالیکه در تئوری الاستیک غیرمحلی، تنش در یک نقطه خاص تابعی از کرنش در تمام نقاط جسم است. رابطه ساختاری در تئوری الاستیسیته غیرمحلی در فرم دیفرانسیلی بصورت زیر بیان می‌شود [۷].

$$\left(1-\mu\nabla^2\right)\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \tag{۲}$$

که در معادله فوق، $\mu=\tau l=(e_0a)^2$ پارامتر مقیاس کوچک در تئوری الاستیسیته غیرمحلی می‌باشد. این پارامتر برای هر ماده خاص با استفاده از آزمایشات مناسب تعیین می‌شود. با توجه به اینکه از کرنش‌های در راستای ضخامت صرفنظر شده است، رابطه ساختاری برای رابطه تنش و کرنش در تئوری غیر محلی بصورت زیر قابل بیان می‌باشد.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{\theta\theta}\\ \sigma_{x\theta}\end{Bmatrix} - \left(e_0a\right)^2\nabla^2\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{\theta\theta}\\ \sigma_{x\theta}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0\\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{\theta\theta}\\ \gamma_{x\theta}\end{bmatrix} \tag{۳}$$

که در معادله فوق E مدول یانگ، ν ضریب پواسون، $\sigma_{xx},\sigma_{\theta\theta}$ و $\sigma_{x\theta}$ بترتیب تنش عمودی و تنش برشی می‌باشند. همچنین $\varepsilon_{xx},\varepsilon_{\theta\theta}$ و $\gamma_{x\theta}$ کرنش‌های عمودی و کرنش برشی می‌باشند که بصورت زیر تعریف می‌شوند [۸].

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{R}(\frac{\partial v}{\partial\theta}+w) - \frac{z}{R^2}(-\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{\partial v}{\partial\theta}) \\ \gamma_{x\theta} &= (\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x}) - \frac{z}{R}(-\frac{2\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x}) \end{aligned} \tag{۴}$$

در تئوری پوسته، منتجه‌های نیرو براساس مولفه‌های تنش تعریف شده در معادله (۳) بصورت زیر تعریف می‌شوند [۷].

$$N_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{xx}\,dz\ ,\quad N_{\theta\theta} = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\theta\theta}dz\ ,\quad N_{x\theta} = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{x\theta}dz\ , \tag{۵}$$

که با استفاده از روابط (۳) و (۴)، منتجه های نیرو بر حسب مولفه‌های جابجایی بصورت زیر قابل بیان است.

$$\begin{aligned} N_{xx} - \left(e_0a\right)^2\nabla^2 N_{xx} &= K\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{w}{R}\right)\right) \\ N_{\theta\theta} - \left(e_0a\right)^2\nabla^2 N_{\theta\theta} &= K\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{w}{R}\right)\right) \\ N_{x\theta} - \left(e_0a\right)^2\nabla^2 N_{x\theta} &= K\left(\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) \end{aligned} \tag{۶}$$

که در رابطه فوق $K=Eh/(1-\nu^2)$، سفتی موثر محوری می‌باشد. همچنین منتجه‌های گشتاور نیز بصورت زیر بیان می‌شوند [۷].

$$M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{xx}z\ dz\ ,\quad M_{\theta\theta} = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\theta\theta}z\ dz\ ,\quad M_{x\theta} = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{x\theta}z\ dz\ , \tag{۷}$$

که با استفاده از روابط (۳) و (۴) بصورت زیر قابل بیان است.

$$M_{xx}-(e_0a)^2\nabla^2 M_{xx}=D\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\left(\frac{1}{R^2}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\right)\right)$$
$$M_{\theta\theta}-(e_0a)^2\nabla^2 M_{\theta\theta}=D\left(-\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left(\frac{1}{R^2}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\right)\right) \quad (۸)$$
$$M_{x\theta}-(e_0a)^2\nabla^2 M_{x\theta}=D\left(\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{1}{R}\left(-\frac{2\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)\right)$$

در معادلات بالا $D=Eh^3/(12(1-\nu^2))$، سفتی موثر خمشی می‌باشد. معادلات (۵) و (۶) به فرم ماتریسی زیر قابل نوشتن است.

$$(1-(e_0a)^2\nabla^2)\begin{Bmatrix}N_x\\N_\theta\\N_{x\theta}\end{Bmatrix}=K\begin{bmatrix}1&\nu&0\\\nu&1&0\\0&0&\frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx,0}\\\varepsilon_{\theta\theta,0}\\\gamma_{x\theta,0}\end{Bmatrix} \quad (۹)$$
$$(1-(e_0a)^2\nabla^2)\begin{Bmatrix}M_x\\M_\theta\\M_{x\theta}\end{Bmatrix}=D\begin{bmatrix}1&\nu&0\\\nu&1&0\\0&0&\frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}=\begin{Bmatrix}\kappa_{xx}\\\kappa_{\theta\theta}\\\kappa_{x\theta}\end{Bmatrix}$$

که $(\varepsilon_{xx,0},\varepsilon_{\theta\theta,0},\gamma_{x\theta,0})$ کرنش صفحه میانی و $(\kappa_{xx},\kappa_{\theta\theta},\kappa_{x\theta})$ انحنای صفحه میانی پوسته می‌باشند که به صورت زیر می‌باشد.

$$\{\varepsilon_{xx,0},\varepsilon_{\theta\theta,0},\gamma_{x\theta,0}\}=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}+w\right),\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right\} \quad (۱۰)$$
$$\{\kappa_{xx},\kappa_{\theta\theta},\kappa_{x\theta}\}=\left\{-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\frac{1}{R^2}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{\partial v}{\partial\theta}\right),\frac{1}{R}\left(-\frac{2\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}$$

حال معادلات حاکم بر حرکت پوسته استوانه‌ای احاطه شده در یک بستر الاستیک وینکلر و پاسترناک براساس تئوری پوسته لاو بصورت زیر تعریف می‌شود [۹].

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial\theta}=I_0\ddot{u}$$
$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{R}\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial\theta}=I_0\ddot{v} \quad (۱۱)$$
$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x\partial\theta}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 M_{\theta\theta}}{\partial\theta^2}-\frac{N_{\theta\theta}}{R}+K_w w-K_p\nabla^2 w=I_0\ddot{w}$$

که در معادلات فوق K_w و K_p بترتیب ضریب بستر وینکلر و بستر پاسترناک می‌باشند. با ضرب طرفین معادله (۱۱) در عبارت $(1-(e_0a)^2\nabla^2)$، معادلات حاکم بر حرکت یک نانولوله کربنی تک‌جداره براساس تئوری لاو و تئوری الاستیستیه غیرمحلی بصورت زیر بدست خواهد آمد.

$$(1-(e_0a)^2\nabla^2)\left(\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial\theta}\right)=(1-(e_0a)^2\nabla^2)I_0\ddot{u}$$
$$(1-(e_0a)^2\nabla^2)\left(\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{R}\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial\theta}\right)=(1-(e_0a)^2\nabla^2)I_0\ddot{v} \quad (۱۲)$$
$$(1-(e_0a)^2\nabla^2)\left(\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x\,\partial\theta}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 M_{\theta\theta}}{\partial\theta^2}-\frac{N_{\theta\theta}}{R}+(K_w w-K_p\nabla^2 w)\right)=(1-(e_0a)^2\nabla^2)I_0\ddot{w}$$

با قراردادن معادله (۱۰) در معادله (۹) و جایگذاری معادله حاصل در معادله فوق، می‌توان معادله (۱۲) را بر حسب مولفه‌ای جابجایی به فرم ماتریسی زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{12} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{L}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{L}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{L}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۱۳)$$

که در معادله فوق L_{ij} و $\bar{L}_{ij}$ عملگرهای دیفرانسیلی می‌باشند. که بطور مثال بصورت زیر تعریف شده‌اند.

$$L_{11} = K\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{1-\nu}{2R^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right), L_{12} = (K)\left(\frac{1+\nu}{2R}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \theta}, L_{13} = \frac{\nu K}{R}\frac{\partial}{\partial x} \quad (۱۴\text{-الف})$$

$$\bar{L}_{11} = \bar{L}_{22} = \bar{L}_{33} = (1-(e_0 a)^2\nabla^2)\left(-\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \quad (۱۴\text{-ب})$$

۳- روش حل ناویر

برای نانولوله با شرایط مرزی ساده-ساده در لبه‌های $x=0$ و $x=L$ میدان‌های جابجایی بصورت زیر درنظر گرفته می‌شوند.

$$\begin{aligned} u &= A\cos\left(\frac{n\pi}{L}x_1\right)\cos\left(\frac{m}{R}x_2\right)e^{i\omega_n t} \\ v &= B\sin\left(\frac{n\pi}{L}x_1\right)\sin\left(\frac{m}{R}x_2\right)e^{i\omega_n t} \\ w &= C\sin\left(\frac{n\pi}{L}x_1\right)\cos\left(\frac{m}{R}x_2\right)e^{i\omega_n t} \end{aligned} \quad (۱۵)$$

که در رابطه بالا $x_2=R\theta$ مختصه محیطی می‌باشد. با جایگذاری میدان‌های جابجایی فوق در معادله (۱۳)، با توجه به عملگرهای دیفرانسیلی (۱۴-الف) و (۱۴-ب) به معادله زیر تبدیل می‌شود.

$$([K]-\omega^2[M])\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۱۶)$$

که ماتریس‌های $[K]$ و $[M]$ ماتریس سفتی و جرم سه در سه هستند که مولفه‌های ماتریس سفتی بصورت زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} k_{11} &= -K\alpha^2 - K\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\beta^2; k_{12} = k_{21} = K\left(\frac{1+\nu}{R}\right)\alpha\beta; k_{13} = k_{31} = \frac{\mu K}{R}\alpha; \\ k_{22} &= -\left(K\frac{1-\nu}{2} + \frac{2D}{R^2}\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\right)\alpha^2 - \left(K + \frac{D}{R^2}\right)\beta^2; \\ k_{23} &= k_{32} = -\left(\frac{D}{R}\right)(\alpha^2\beta) - \frac{K}{R}(\beta) - \frac{D}{R}(\beta^3); \\ k_{33} &= -D\alpha^4 - (2D)\alpha^2\beta^2 - D\beta^4 - \frac{K}{R}; \end{aligned} \quad (۱۷)$$

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_{22} = m_{33} = 1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2) \\ m_{12} &= m_{13} = m_{23} = m_{21} = m_{32} = m_{32} = 0 \end{aligned} \quad (۱۸)$$

که $\alpha=n\pi/L$ و $\beta=m/R$ است. .برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی نانولوله کربنی کافیست معادله زیر حل شود.

$$\det([K]-\omega^2[M]) = 0 \quad (۱۹)$$

۴- نتایج عددی

در این بخش به بررسی نتایج حاصل از تحلیل ارتعاشات خطی نانولوله‌های کربنی تک‌جداره پرداخته خواهد شد. پارامترهای بی‌بعد مورد نیاز بصورت زیر تعریف می‌شوند.

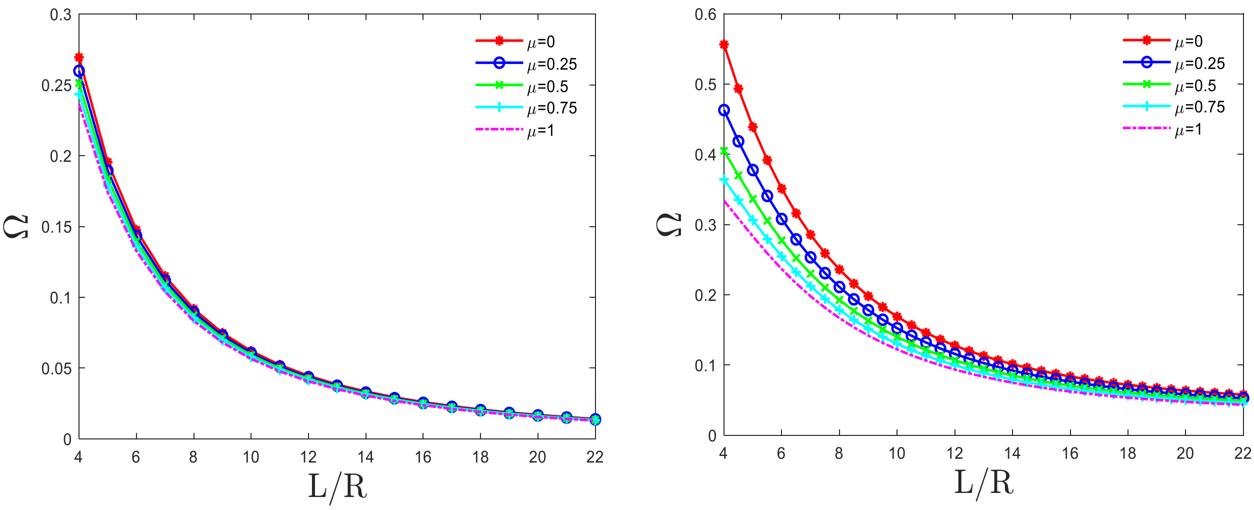
$$\Omega = \omega R\sqrt{\frac{\rho}{E}}, \bar{K}_w = \frac{K_w L^4}{EI}, \bar{K}_p = \frac{K_p L^2}{EI} \quad (۲۰)$$

که در معادله بالا Ω بیانگر فرکانس بی‌بعد، $\bar{K}_w$ بیانگر ضریب وینکلر بی‌بعد و $\bar{K}_p$ بیانگر ضریب پاسترناک بی‌بعد می‌باشد. مدول یانگ نانولوله برابر با E=1.06TPa و چگالی آن ρ=1340kg/m^3 و ضریب پواسون آن برابر با ν=0.3 در نظر گرفته شده است. برای صحت‌سنجی مدل، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد حاصل از پژوهش حاضر در جدول (۱) با نتایج مرجع [۱۰] مقایسه شده است.n شماره موج طولی و m شماره موج محیطی می‌باشند. با مقایسه فرکانس‌های طبیعی بدست آمده با فرکانس‌های طبیعی مرجع می‌توان به صحت و دقت روش بکار برده شده پی برد.

جدول ۱: فرکانس طبیعی بی‌بعد نانولوله (h/R=0.0034 , L/R=2, R=2.32nm, n=1)

		m=1	m=2	m=3
μ=0 (nm)^2	مرجع[۱۰]	۰/۵۹۷۲	۰/۳۴۰۲	۰/۲۰۱۴
	روش ناویر	۰/۶۰۰۴	۰/۳۴۲۹	۰/۲۰۳۱
μ=0.1(nm)^2	مرجع[۱۰]	۰/۵۷۵۲	۰/۳۱۶۰	۰/۱۷۷۱
	روش ناویر	۰/۵۸۲۰	۰/۳۲۴۰	۰/۱۸۴۴
μ=0.3(nm)^2	مرجع[۱۰]	۰/۵۳۹۵	۰/۲۸۱۰	۰/۱۴۶۶
	روش ناویر	۰/۵۴۹۶	۰/۲۹۴۰	۰/۱۵۸۶
μ=0.5(nm)^2	مرجع[۱۰]	۰/۵۰۶۵	۰/۲۵۴۰	۰/۱۲۷۹
	روش ناویر	۰/۵۲۲۲	۰/۲۷۱۰	۰/۱۴۱۳

در این بخش به بررسی تاثیر نسبت طول به شعاع نانولوله کربنی تک‌جداره بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد در پارامتر مقیاس کوچک مختلف پرداخته می‌شود. در شکل (۲-الف) و (۲-ب) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برای نسبت‌های مختلف طول به شعاع نانولوله بر اساس پارامتر مقیاس کوچک مختلف برای شرایط مرزی ساده-ساده آورده شده است. همانگونه که در شکل‌های مذکور نیز قابل مشاهده است، با افزایش این نسبت، فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش پیدا می‌کند. در جدول (۲) فرکانس طبیعی بی‌بعد براساس برخی از نسبت‌های طول به شعاع نانولوله کربنی تک‌جداره آورده شده است. تاثیر نسبت شعاع به ضخامت نانولوله کربنی تک‌جداره بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد در پارامتر مقیاس کوچک مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. همانطور که در شکل (۳-الف) و (۳-ب) مشخص است، با افزایش این نسبت فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش پیدا می‌کند. با توجه به شکل (۲) و شکل (۳) و همچنین توضیحات ارائه شده می‌توان نتیجه گرفت که تغییر پارامترهای هندسی از جمله کاهش طول یا افزایش ضخامت نانولوله در افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد و در نتیجه پایداری نانولوله موثر می‌باشند. در شکل (۴-الف) و (۴-ب) دو شکل مود نانولوله کربنی تک‌جداره آورده شده است.

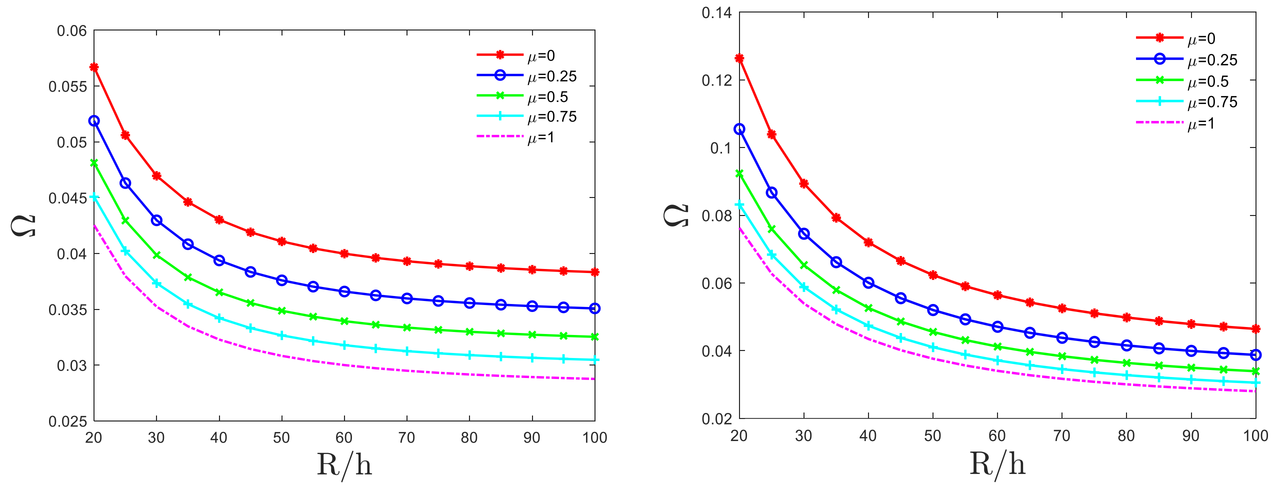


(ب)(R/h=20, n=3, m=2)   (الف)(R/h=20, n=1, m=1)

شکل ۲: فرکانس طبیعی اول بی‌بعد براساس نسبت L/R های مختلف

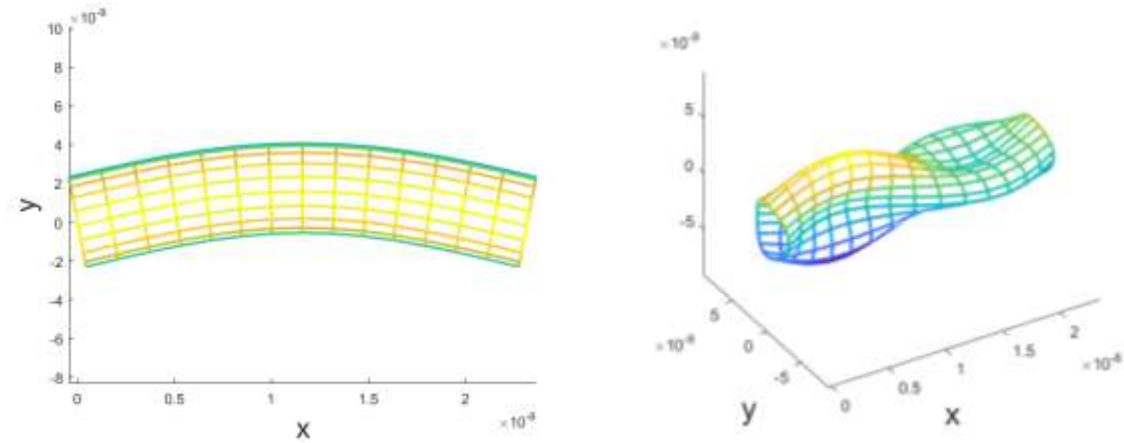
جدول ۲: فرکانس طبیعی بی‌بعد نانولوله براساس L/R‌های مختلف (*R/h*=20 , R=2.32*nm*, *n*=1, *m*=1)

	L/R=4	L/R=10	L/R=15	L/R=22
μ=0(nm)^2	۰/۲۶۹۴	۰/۰۶۲۰	۰/۰۲۹۴	۰/۰۱۴۱
μ=0.25(nm)^2	۰/۲۵۹۹	۰/۰۶۰۵	۰/۰۲۸۷	۰/۰۱۳۸
μ=0.50(nm)^2	۰/۲۵۱۲	۰/۰۵۹۱	۰/۰۲۸۰	۰/۰۱۳۵
μ=0.75(nm)^2	۰/۲۴۳۴	۰/۰۵۷۸	۰/۰۲۷۴	۰/۰۱۳۲
μ=1(nm)^2	۰/۲۳۶۳	۰/۰۵۶۵	۰/۰۲۶۹	۰/۰۱۲۹



ب) الف)

شکل ۳: بررسی فرکانس طبیعی بی‌بعد براساس نسبت *R/h* های مختلف الف) (*L/R*=15, *n*=2, *m*=2) ب)(*L/R*=15, *n*=3, *m*=3)



(*L/R*=10, *R/h*=20, *n*=2, *m*=2)ب) **(*L/R*=10, *R/h*=20, *n*=1, *m*=1)الف)**

شکل ۴: شکل مود نانولوله کربنی تک‌جداره

در ادامه به بررسی تاثیر ضریب وینکلر و پاسترناک برروی فرکانس طبیعی بی‌بعد در پارامتر مقیاس کوچک مختلف پرداخته می‌شود. شکل (۵-الف) و (۵-ب) بیانگر تاثیر ضریب وینکلر برروی فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌باشد. همانطور که در این شکل‌ها پیداست، با افزایش ضریب وینکلر فرکانس طبیعی بی‌بعد نیز افزایش پیدا می‌کند. همچنین در جدول (۳) فرکانس طبیعی بی‌بعد براساس برخی از ضرایب وینکلر بی‌بعد نانولوله کربنی تک‌جداره آورده شده است.

جدول ۳: فرکانس طبیعی بی‌بعد نانولوله براساس ضرایب بی‌بعد وینکلر مختلف (L/R=10,R/h=20 , R=2.32nm, n=1, m=1)

	$\bar{K}_w=20$	$\bar{K}_w=60$	$\bar{K}_w=150$	$\bar{K}_w=200$
$\mu=0(nm)^2$	۰/۱۰۳۶	۰/۱۵۶۰	۰/۲۳۲۳	۰/۲۶۴۲
$\mu=0.25(nm)^2$	۰/۱۰۱۱	۰/۱۵۲۱	۰/۲۲۶۵	۰/۲۵۷۷
$\mu=0.5(nm)^2$	۰/۰۹۸۷	۰/۱۴۸۶	۰/۲۲۱۲	۰/۲۵۱۷
$\mu=1(nm)^2$	۰/۰۹۴۴	۰/۱۴۲۱	۰/۲۱۱۷	۰/۲۴۰۸

۵- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله یک فرمولبندی برای بررسی فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد نانولوله‌های کربنی تک‌جداره با استفاده از تئوری پوسته‌های نازک و تئوری الاستیسیته غیر محلی ارایه شده است و فرکانس‌های طبیعی نانولوله با استفاده از روش ناویر استخراج شده و اثر پارامترهای مختلف موثر بر فرکانس طبیعی نانولوله بررسی شده است. برای بررسی صحت و دقت نتایج، نتایج عددی بدست آمده با نتایج موجود در منابع مقایسه شده است و صحت نتایج نشان داده شده است. سپس در نتایج عددی تاثیر پارامترهای هندسی و پارامتر غیر محلی بر فرکانس‌های طبیعی نانولوله بررسی شده است. با بررسی نتایج عددی، مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت طول به شعاع نانولوله، و با افزایش نسبت شعاع به ضخامت نانولوله، فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش می‌یابد. با افزایش ضریب سفتی بستر وینکلر و پاسترناک فرکانس طبیعی بی‌بعد افزایش پیدا می‌کند و با افزایش پارامتر غیرمحلی، فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش پیدا می‌کند.

مراجع

[1] S. Iijima, "Helical microtubules of graphitic carbon," *nature*, vol. 354, no. 6348, pp. 56-58, 1991.

[2] R. Ansari, H. Rouhi ,and S. Sahmani, "Studying the Vibrational Behavior of Single-Walled Carbon Nanotubes under Different Boundary Conditions using the Rayleigh-Ritz Technique," *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, vol. 8, no. 2, pp. 51-67, 2016.

[3] M .Hussain, M. N. Naeem, A. Shahzad, and M. He, "Vibrational behavior of single-walled carbon nanotubes based on cylindrical shell model using wave propagation approach," *AIP Advances*, vol. 7, no. 4, 2017.

[4] K. Avramov, "Nonlinear vibrations characteristics of single-walled carbon nanotubes by nonlocal elastic shell model," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 107, pp. 149-160, 2018

[5] S. S. Abdullah, S. Hosseini-Hashemi, N. A. Hussein, and R. Nazemnezhad, "Effect of temperature on vibration of cracked single-walled carbon nanotubes embedded in an elastic medium under different boundary conditions," *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, vol. 50, no. 5, pp. 1614-1639, 2022.

[6] M. M. Selim, M. F. Alotaibi, A. Soltani, A.-B. A. Mohamed, and A.-H. Abdel-Aty, "Torsional vibrational analysis of irregular single-walled carbon nanotube with elastic-support boundary conditions," *Journal of Materials Research and Technology*, vol. 24, pp. 215-222, 2023.

[7] M. Asghari, J. Rafati, and R. Naghdabadi, "Torsional instability of carbon nano-peapods based on the nonlocal elastic shell theory," *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, vol. 47, pp. 316-323, 2013.

[8] G. Warburton and S. Soni, *"Resonant response of orthotropic cylindrical shells," Journal of Sound and Vibration, vol. 53, no. 1, pp. 1-23, 1977.*

[9] Hua, L. I., and K. Y. Lam. "Frequency characteristics of a thin rotating cylindrical shell using the generalized differential quadrature method." *International Journal of Mechanical Sciences* 40.5 (1998): 443-459.

[10] A. Alibeigloo and M. Shaban, "Free vibration analysis of carbon nanotubes by using three-dimensional theory of elasticity," *Acta Mechanica*, vol. 224, pp. 1415-1427, 2013.