ISAV2024
چهارده‌همین کنفرانس بین المللی آکوستیک و ارتعاشات
۲۱و ۲۲ آذر ماه۱۴۰۳ کرج - ایران

بررسی فرمول‌بندی مستقیم گسسته معادله پیوستگی مربوط به اکوستیک و مقایسه‌ی آن با رهیافت دیفرانسیلی

حسین گلنارکار

ایران، بیرجند، بلوار شهید آوینی،، دانشگاه ملی مهارت، دانشکده علوم پایه، ۹۷۱۷۴۳۴۷۶۷، مربی پیمانی

Golnarkarhossein00@gmail.com

چکیده

در این مقاله، فرمول‌بندی دیفرانسیلی معادله پیوستگی در اکوستیک با فرمول‌بندی که برای آن در روش مستقیم گسسته به دست می‌آید، مقایسه شده است. فرمول‌بندی مستقیم گسسته مبتنی بر مفاهیم عمیق فیزیکی از متغیرها و نسبت دادن هر یک از آنها به یک عنصر فضایی مانند نقطه، خط، سطح، و حجم و یک عنصر زمانی مانند لحظه یا بازه‌ی زمانی، در یکی از دستگاه‌های مختصات اولیه یا ثانویه (دوگان) و ارائه‌ی معادلات به شکل گسسته است. با معلوم بودن معادله گسسته یا جبری پیوستگی از همان ابتدا، دیگر نیازی به متوسل شدن به روش‌های عددی مبتنی بر معادلات دیفرانسل تفاضل محدود، حجم محدود، نیست و بنابراین، این روش، یک مجموعه معادلات گسسته برای به دست آوردن جواب در دسترس قرار می‌دهد. از آنجا که هدف نهایی هر شبیه سازی عددی توافق با اندازه گیری های آزمایشگاهی است، و از آنجا که ما در کل متغیرهای گلوبال را اندازه گیری می کنیم، این رهیافت اجازه می دهد تا ارتباط نزدیکی بین معادله پیوستگی و شکل عملگرها در رهیافت دیفرانسیلی و رهیافت مستقیم گسسته برقرار کنیم.

کلمات کلیدی: معادله پیوستگی؛ روش مستقیم گسسته؛ دستگاه مختصات اولیه؛ دوگان.

۱- مقدمه

در پدیده‌های فیزیکی، معمول بر این است که پدیده‌های فیزیکی به شکل معادلات دیفرانسیلی نوشته می‌شود. معادله‌ی پیوستگی در اکوستیک نیز از این قاعده مستثنی نیست. اما معادلات دیفرانسیل در معدود مواردی است که به روش تحلیلی قابل باشد و عمدتاً برای حل آنها در مسائل فیزیکی واقعی، نیاز به روشهای متداول عددی، همچون روش تفاضل محدود، روش عنصر محدود، روش حجم محدود و غیره داریم. در این مقاله قصد داریم روش گسسته‌ی مستقیم را برای به دست آوردن معادله‌ی پیوستگی با روش معادله‌ی دیفرانسیلی مقایسه کنیم. البته با اینکه روش معادله‌ی دیفرانسیلی روشی دقیق است اما نمی‌تواند منجر به جواب‌های تحلیلی دقیق شود. دلیل روی آوردن به سمت روش مستقیم گسسته نیز همین است که از ابتدا معادلاتی گسسته و جبری را ارائه می‌دهد و عمیقاً به مفاهیم فیزیکی و تناظر عناصر فضایی با کمیت‌های فیزیکی توجه دارد. همچنین با پیشرفت محاسبات سنگین توسط کامپیوتر، این توجیه وجود دارد تا جواب عددی مسائل میدان را با در نظر گرفتن معادلات جبری که از روش مستقیم گسسته حاصل می‌شود، به کمک محاسبات سنگین با الگوریتم ارائه شده در این روش، توسط کامپیوتر، به دست آوریم. بنابراین، با اجتناب از هرگونه فرایند گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل، و نوشتن مستقیم میدان اکوستیک از همان ابتدا به صورت گسسته یعنی جبری این دو روش معادله دیفرانسیلی و مستقیم گسسته را با یکدیگر مقایسه و مزایای روش پیشنهادی را بیان می‌کنیم.

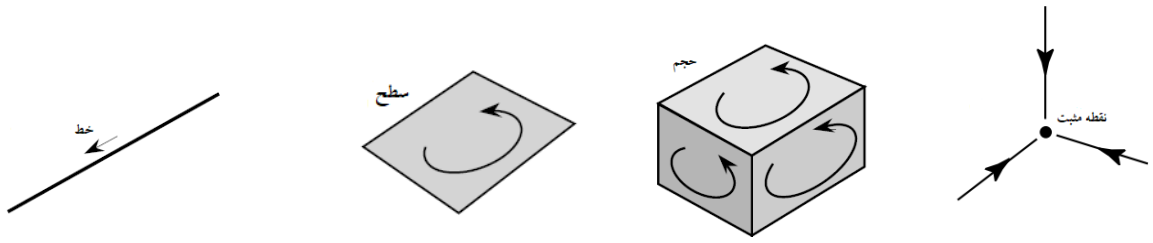
۲- روش مستقیم گسسته

فرمول‌بندی معادلات مربوط به میدان اکوستیک به روش مستقیم گسسته، به معنای رد کردن معادلات دیفرانسیل مربوط به آنها نیست، بلکه جایگزینی برای آن محسوب می‌شود. در این روش ابتدا به بررسی و مرور متغیرهای فیزیکی اکوستیک موجود در معادله‌ی میدان می‌پردازیم. همانطور که می‌دانیم در رهیافت معادله‌ی دیفرانسیلی، نیاز به توابع نقطه‌ای، به منظور انجام مشتق‌گیری وجود دارد. صرف نظر از چند متغیر فیزیکی که به طور مستقیم می‌توان آنها را بر حسب توابع نقطه‌ای نوشت، مانند دما، پتانسیل الکتریکی، و مکان، اغلب توابع میدان، از متغیرهای دیگری مانند خط، سطح، و حجم ناشی می‌شوند که چگالی‌های مربوط به متغیرهای میدان را می‌دهند. از این‌رو، به عنوان مثال، فشار که کمیت مهمی در اکوستیک و ارتعاش مولکولهای محیط حامل میدان محسوب می‌شود با تأکید بر عنصر فضایی مربوط به آن، به صورت نسبت نیروی قائم، به سطح است؛ چگالی جرمی، که کمیت مهمی در اکوستیک است، با تأکید بر عنصر فضایی مربوط به آن نسبت جرم به حجم است. هر متغیری با توجه به مفهوم فیزیکی آن متغیر به یک عنصر فضایی مانند خط، سطح، یا حجم مربوط می‌شود. این متغیرها را متغیر گلوبال می‌نامیم، زیرا قرار است به یکی از کمیت‌های گلوبال یعنی، خط، سطح، یا حجم نسبت داده شوند. متغیر گلوبال در فضا متغیری است که چگالی نباشد. متغیر گلوبال در زمان متغیری است که آهنگ تغییرات نباشد. تا اینجا مشخص شد که روش مستقیم گسسته مبتنی بر کمیت‌های گلوبال است. مرحله‌ی اول تشکیل چگالی متوسط که در فوق ذکر شد در معادلات ساختمندی وارد می‌شوند، اما مرحله‌ی دوم مربوط به انجام فرایند حدگیری به سمت صفر در روش مستقیم گسسته انجام نمی‌شود، زیرا فقط در یک سطح یا حجم محدود محاسبات انجام می‌شود و معادلات نوشته می‌شود. نکته‌ی مهم دیگر در خصوص ارتباط متغیرهای گلوبال با یک عنصر فضایی و زمانی، مفهوم جهت‌گیری آن عنصر است که در بخش ۲-۱ به آن پرداخته شده است.

۲-۱ جهت‌گیری داخلی و خارجی، و اعداد تلاقی

در فرمول‌بندی مستقیم گسسته دو نوع جهت‌گیری داخلی برای عناصر فضایی در سیستم مختصات اولیه و جهت‌گیری خارجی برای عناصر فضایی در سیستم مختصات دوگان وجود دارد. سیستم مختصات اولیه از یک مثلث‌بندی مانند مثلث‌بندی دلانی [1] به دست می‌آید. لازم به ذکر است که مانسته‌ی کلیه‌ی عملگرهای دیفرانسیلی که در رهیافت مستقیم گسسته به دست می آیند با در نظر گرفتن این جهت‌گیری ها و اعداد تلاقی مربوط به آنها است [2] .

جهت‌گیری داخلی مربوط به نقطه (مثبت) به صورت خطوط وارد بر آن نقطه هستند که آن نقطه، در آن به عنوان یک چاه در نظر گرفته می‌شود. از این‌رو جهت‌گیری داخلی مربوط به نقطه (منفی) به صورت خطوط خارج شده از آن نقطه هستند که آن نقطه، در آن به عنوان یک چشمه در نظر گرفته می‌شود. به همین ترتیب جهت‌گیری داخلی یک خط را به عنوان راستایی در امتداد خط در نظر گرفته می‌شود. جهت‌گیری داخلی یک سطح به عنوان راستایی در امتداد خط در نظر گرفته می‌شود. جهت‌گیری داخلی عناصر فضایی در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. جهت‌گیری داخلی یک نقطه (مثبت) ، خط، سطح و حجم.

برای جهت‌گیری خارجی نیز باید تعریفی ارائه دهیم. تعریف جهت‌گیری خارجی مربوط به نقطه (مثبت)، و سایر عناصر فضایی در شکل ۲ نشان داده شده است.

شکل ۲. جهت‌گیری خارجی یک حجم، سطح، خط و نقطه (مثبت).

برای معرفی اعداد تلاقی گرادیان تابعی مانند $\boldsymbol{f(x)}$ را به عنوان نمونه در نظر می‌گیریم

$$\nabla f(x) = (+1)f(x + \Delta x) + (-1)f(x) \qquad (۱)$$

عددهای $(+1)$ و (-1) در این رابطه را اعداد تلاقی می‌نامیم. در واقع $\nabla f(x)$ مطابق با آنچه در مورد نقطه گفته شد با عدد تلاقی $(+1)$ به نقطه‌ی $f(x + \Delta x)$ وارد می‌شود (یعنی به عنوان یک چاه یا نقطه مثبت در نظر گرفته می‌شود) و با عدد تلاقی (-1) به نقطه‌ی $f(x)$ وارد می‌شود (یعنی به عنوان یک چشمه یا نقطه منفی در نظر گرفته می‌شود).

۳- فشار و چگالی در رهیافت مستقیم گسسته

چنانکه در قسمت ۲ گفته شد، در فرمول‌بندی مستقیم گسسته، باید متغیرهای گلوبال را به کار بریم. همچنین، چنانکه ذکر شد، در معادلات ساختمندی، چگالی‌های متوسط مد نظر قرار می‌گیرند. بنابراین در معادله‌ی موج اکوستیکی به جای اهمیت دادن به متغیر سرعت، باید گردش سرعت را در نظر بگیریم. در واقع، این متغیر را می‌توانیم به عنوان یک متغیر گلوبال مربوط به عنصر فضایی "خط" در سیستم مختصات اولیه در نظر بگیریم، زیرا جهتمندی آن به دور سطح با توجه به شکل (۱) نشان از مربوط بودن آن به جهت‌گیری داخلیو بنابراین مختصات اولیه است. در واقع باید مؤلفه‌ی سرعت در راستای هر کدام از خط‌ها در سیستم مختصات اولیه را در محاسبات وارد کنیم و چون این مؤلفه در طول آن خط ضرب می‌شود، بنابراین متغیر اصلی ما همان گردش سرعت است [4].

برای وارد شدن به اکوستیک باید یک تابع نرده‌ای را به کار ببریم. می‌توانیم هریک از متغیرهای فشار، چگالی، پتانسیل کینتیک را انتخاب کنیم اما آخری را انتخاب می‌کنیم تا یک متغیر کینماتیک باشد [5]. حال با داشتن تابع نرده‌ای، به دنبال یک معادله‌ی نرده‌ای هستیم. معادله‌ی نرده‌ای که در این مقاله به بررسی آن می‌پردازیم معادله‌ی پیوستگی در اکوستیک است.

در اکوستیک فرض بر آن است که حرکت، غیر چرخشی است. همچنین سرعتها در مقایسه با سرعت صوت، کوچک هستند. از اکوستیک می‌دانیم که

$$\begin{cases} p(\vec{r}, t) = p_0 + p^*(\vec{r}, t) & (۲\text{-الف}) \\ \rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \rho^*(\vec{r}, t) & (۲\text{-ب}) \end{cases}$$

که در آن $\boldsymbol{p^*}$ و $\boldsymbol{\rho^*}$ به ترتیب اضافه‌ی فشار و اضافه‌ی چگالی هستند و در شرط $\boldsymbol{p^* \ll p_0}$ و $\boldsymbol{\rho^* \ll \rho_0}$ صدق می‌کنند. در این رهیافت، چگالی، فشار، سرعت و سایر متغیرها در هر سلول و در رئوس مثلث‌بندی دلانی به دست می آید و بعد برای به دست آوردن مقادیر آنها در داخل هر سلول، با استفاده از میانیابی، محاسبات انجام می‌شود. علاوه بر فرضهای (۲-الف) و (۲-ب) در مدلی که بر مبنای روش مستقیم گسسته ارائه می‌شود، از یک دستگاه مختصات باریسنتریک را برای دستگاه مختصات دوگان انتخاب می‌کنیم و فرض می کنیم که محیط ناهمگن است. در این صورت سرعت صوت و چگالی در هر سلول که آنها را به ترتیب با $\boldsymbol{c_c}$ و و $\boldsymbol{\rho_c}$ نشان می دهیم، از یک سلول به سلول دیگر می تواند تغییر کند. اما در داخل هر سلول ماده را همگن فرض می کنیم. در این صورت در داخل هر حجم سلولی $\boldsymbol{V_c}$ چگالی و فشار یکنواخت فرض می شوند. همچنین فرمول‌بندی مستقیم گسسته متغیرهای پیکربندی، چشمه، و انرژی را از یکدیگر تفکیک می‌نماید.

این سه دسته متغیر به صورت زیر می‌شوند: (الف) متغیرهای هندسی و سینماتیک که پیکربندی میدان را توصیف می کنند، متغیرهای پیکربندی نامیده می شوند. (ب) متغیرهای استاتیک و دینامیک که چشمه های میدان را توصیف می کنند، متغیرهای چشمه نامیده می شوند. (ج) متغیرهای انرژی، با حاصلضرب یک متغیر پیکربندی در یک متغیر چشمه به دست می آیند [3].

۴- مقایسه‌ی رهیافت مستقیم گسسته با دیفرانسیلی

چنانکه ذکر شد در اکوستیک فرض بر این است که میدان سرعت، غیر چرخشی است. این فرض که در رهیافت دیفرانسیلی به صورت زیر بیان می‌شود،

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0. \qquad (۳)$$

در رهیافت مستقیم گسسته به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Gamma[\mathrm{I}, \partial \mathbf{S}] = 0. \qquad (۴)$$

که در آن I لحظه زمانی (نه بازه ای از زمان)، و $\partial \mathbf{S}$ مسیری در امتداد سطح است تا گردش سرعت را در یک لحظه از زمان تعریف کند. مقایسه‌ی رابطه‌ی (۳) و (۴) نشان می‌دهد که برای به دست آوردن مانسته‌ی عملگر دیفرانسیلی کرل در رهیافت مستقیم گسسته، باید ماتریسی را به دست آوریم که آرایه های آن، همان اعداد تلاقی ارتباط دهنده‌ی سطوح هر سلول و مرزهای آن سطوح که همان خط ها هستند، می‌باشد. چنانچه یک خط، مرز یک سطح مورد نظر باشد، و همراستا با جهت چرخش مرز طی شود, عدد تلاقی آن $+1$ است و اگر در خلاف جهت آن طی شود -1 است و در صورتی که یک خط مرزی از یک سطح مورد نظر نباشد، عدد تلاقی میان آن خط و سطح صفر در نظر گرفته می‌شود.

همچنین پتانسیل کینتیک را که قرار شد به عنوان متغیر گلوبال در نظر بگیریم در نقاط، و به صورت گردش سرعت از یک نقطه‌ی ثابت تا نقطه‌ی مورد نظر تعریف می‌شود. بنابراین، این متغیر را به صورت $\varphi[t, p]$ یعنی در لحظاتی از زمان و در نقاطی از فضا تعریف می‌شود.

دسته بندی متغیرها در اکوستیک در رهیافت مستقیم گسسته چنانکه بیان گردید هر متغیر به لحاظ فضایی به یکی از عناصر فضایی (نقطه **P** ، خط **L**، سطح **S**، یا حجم **V**) و به لحاظ زمانی به یکی از عناصر زمانی (لحظه‌ی زمانی **I** یا بازه‌ی زمانی **T**) مربوط می شود. متغیرهای پیکربندی گلوبال در اکوستیک در جدول ۱ نشان داده شده است.

جدول ۱. متغیرهای پیکربندی گلوبال در اکوستیک

نام متغیر	نماد
پتانسیل کینتیک	$\boldsymbol{\varphi}[\mathbf{I}, \mathbf{P}]$
گردش سرعت	$\boldsymbol{\Gamma}[\boldsymbol{I}, \boldsymbol{L}]$

متغیرهای چشمه گلوبال در اکوستیک نیز در جدول ۱ نشان داده شده است.

جدول ۲. متغیرهای پیکربندی گلوبال مربوط به اکوستیک

نام متغیر	نماد
جرم ثابت	$\boldsymbol{m^c}[\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\mathbf{P}}]$
جرم در جریان	$\boldsymbol{m^f}[\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{S}}]$
تکانه‌ی ثابت	$\boldsymbol{P^c}[\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\mathbf{V}}]$
تکانه‌ی در جریان	$\boldsymbol{P^f}[\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{S}}$

رابطه‌ی تعادل جرم در رهیافت مستقیم گسسته به شکل زیر نوشته می‌شود

$$m^c[\tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{n+1}}, \tilde{\mathbf{v}}_{\boldsymbol{h}}] - m^c[\tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{n}}, \tilde{\mathbf{v}}_{\boldsymbol{h}}] + m^f[\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{n}}, \partial\tilde{\mathbf{v}}_{\boldsymbol{h}}] = 0. \qquad (۵)$$

که این رابطه برای یکی از نقاط شبکه در رؤس h نوشته شده است. لحظات زمانی در دستگاه زمانی دوگان هم با $\tilde{t}_n$ و بازه ی زمانی با $\tilde{\tau}_n$ نشان داده شده است.

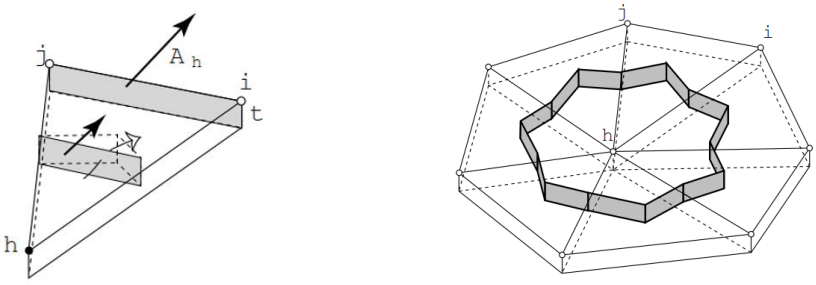
رابطه‌ی تعادل تکانه نیز در این رهیافت به ورت زیر نوشته می‌شود

$$\boldsymbol{P^c}[\tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{n+1}}, \tilde{\mathbf{v}}_{\boldsymbol{h}}] - \boldsymbol{P^c}[\tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{n}}, \tilde{\mathbf{v}}_{\boldsymbol{h}}] + \boldsymbol{P^f}[\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{n}}, \partial\tilde{\mathbf{v}}_{\boldsymbol{h}}] = \mathbf{I}[\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{n}}, \partial\tilde{\mathbf{v}}_{\boldsymbol{h}}]. \qquad (۵)$$

روابط (۴) و (۵) که برای یکی از نقاط شبکه در رؤس h نوشته شده است. لحظات زمانی در دستگاه زمانی دوگان هم با $\tilde{t}_n$ و بازه ی زمانی با $\tilde{\tau}_n$ نشان داده شده است. ارتباط تکانه‌ی در جریان $\boldsymbol{P^f}[\tilde{\tau}_n, \partial\tilde{v}_h]$ ، در هر سلول با سرعت در آن سلول به صورت زیر است:

$$\boldsymbol{P^f}[\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{n}}, \partial\tilde{\mathbf{v}}_{\boldsymbol{h}}] = \frac{1}{3}\tilde{\tau}_n \sum_{cells} \rho_c^0(\mathbf{u_c}(t_n).\boldsymbol{A_h^c})\mathbf{u_c}(t_n). \qquad (۵)$$

که ضریب $\frac{1}{3}$ به دلیل وارد شدن تنها یکی از سه رأس مثلث هر سلول، در مثلث‌بندی اولیه وارد شده است و ضمناً $\mathbf{A}_h^c$ سطح مقابل به رأس h در مثلث‌بندی است که در شکل (۳) نشان داده شده است.



شکل (۳). رئوس یکی از مثلثها در مثلث‌بندی دامنه‌ی اولیه با رئوس $\boldsymbol{h}$، $\boldsymbol{i}$، و $\boldsymbol{j}$ و شارهای وارد شده به درون آن. ضخامت $\boldsymbol{t}$ را برای این مثلث‌بندی فرض می کنیم. سطح $\boldsymbol{A_h}$ در مقابل رأس $\boldsymbol{h}$ قرار گرفته است.

چنانکه می دانیم، در رهیافت دیفرانسیلی، مسأله‌ی اساسی اکوستیک یافتن $\boldsymbol{\varphi(t,\vec{r})}$ است، یعنی یافتن پتانسیل در هر لحظه از زمان و در هر نقطه از فضا. در رهیافت مستقیم گسسته، به صورت گسسته برای هر سلول تعریف می‌شود، یعنی یافتن پتانسیل در تمام رئوس (نقطه های سیستم مختصات اولیه) و در تمام لحظه های زمانی گسسته. برای به دست آوردن مقدار این کمیت در داخل هر سلول، باید میانیابی انجام شود.

در صورتی که مقادیر پتانسیل کینتیک در رئوس نشان داده شده در شکل (۳) را داشته باشیم، می توان نشان داد که شکل ماتریس گرادیان در دو بعد، برای هر سلول به صورت زیر با مؤلفه های سطوح مقابل رئوس مثلث، ارتباط دارد:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{G_x}\\ \boldsymbol{G_y}\end{bmatrix} = \frac{1}{2tA_c}\begin{bmatrix}A_{hx} & A_{ix} & A_{jx}\\ A_{hy} & A_{iy} & A_{jy}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_h\\ \varphi_i\\ \varphi_j\end{bmatrix}. \qquad (۶)$$

با داشتن شکل ماتریسی عملگر گرادیان (و به شکل مشابهی و پس از انجام محاسبات برای عملگرهای دیورژانس و کرل) در فرمول‌بندی مستقیم گسسته، سایر معادلات مربوطه را نیز می‌توان به دست آورد و آنها را با همانند رابطه‌ی (۶) با عناصر فضایی مرتبط نمود.

۵- نتیجه گیری

به بررسی فرمول‌بندی مستقیم گسسته برای معادله پیوستگی در اکوستیک پرداختیم. نشان داده شد که می‌توان رهیافتی جایگزین با شروع مستقیم از قوانین فیزیک برای معادله پیوستگی به دست آورد. این امر با استفاده از متغیرهای گلوبال و ارتباط طبیعی آنها با عناصر فضایی و زمانی انجام می شود. چنین ارتباطی با تکیه بر نقش جهت‌گیری درونی و بیرونی عنصر فضایی و زمانی انجام می شود.

متغیرهای اکوستیک در جدول (۱) و (۲) در طبقه‌بندی پیکربندی، چشمه و انرژی قرار گرفتند که متغیرهای پیکربندی به طور طبیعی به سلول‌های مختصات اولیه (مثلث‌بندی دلانی) و متغیرهای چشمه به مختصات دوگان (باریسنتریک) با جهت‌گیری خارجی مربوط می‌شوند.

مراجع

1. Truesdell C., Toupin R., The Classical Field Theories Handbuck der Physik, Band III/1, Springer, 1960.
2. Zovatto L., “Ordine di Convergenza Superiore in un Approccio Discreto”, *Atti del XIII Convegno Italiano di Meccanica Computazionale*, Brescia 13-15 novembre, 2000.
3. Tonti E., “A Direct Discrete Formulation of Field Laws: The Cell Method”; *Computer Modelling in Engineering & Science*, (in print).
4. Ferretti E., Viola E., Di Leo A., “Modellazione del Comportamento Macroscopico in Compressione del Calcestruzzo a Partire da Nuove Assunzioni Costitutive”, Atti del Convegno AIAS ’99, pp. 767-776, Vicenza, 8-11 Settembre 1999.
5. Mavriplis D.J, “Multigrid Techniques for Unstructured Meshes”, *Von Karman Institute of Fluid Dynamics*, Lecture Series 1995-02, Computational Fluid Dynamics (1995).